

# مدل سازی تحلیلی توزیع چگالی میدان مغناطیسی در نواحی مختلف یک موتور سنکرون مغناطیس دائم به روش مدل سازی میدان زیردامنه

سیدرضا مرتضائی<sup>۱</sup> محمود حسینی علی آبادی<sup>۲</sup> شهرام جوادی<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکترای تخصصی- گروه مهندسی برق- دانشکده فنی و مهندسی- واحد تهران مرکزی- دانشگاه آزاد اسلامی- تهران- ایران  
[rez.mortezaeei.eng@iauctb.ac.ir](mailto:rez.mortezaeei.eng@iauctb.ac.ir)

۲- استادیار- گروه مهندسی برق- دانشکده فنی و مهندسی- واحد تهران مرکزی- دانشگاه آزاد اسلامی- تهران- ایران  
[mah.hosseini-aliabadi@iauctb.ac.ir](mailto:mah.hosseini-aliabadi@iauctb.ac.ir)

۳- دانشیار- گروه مهندسی برق- دانشکده فنی و مهندسی- واحد تهران مرکزی- دانشگاه آزاد اسلامی- تهران- ایران  
[sh.javadi@iauctb.ac.ir](mailto:sh.javadi@iauctb.ac.ir)

**چکیده:** در این مقاله یک روش تحلیلی مبتنی بر روش زیر دامنه برای مدل سازی توزیع میدان مغناطیسی اطراف یک موتور سنکرون مغناطیس دائم ارائه شده است. روش مدل سازی مبتنی بر محاسبه بردار پتانسیل اسکالر و تخمین توزیع چگالی میدان مغناطیسی در هر زیردامنه است بطوریکه ابتدا حوزه میدان مغناطیسی موتور تحت مطالعه به شش زیر دامنه شامل شفت روتور، هسته روتور، آهنرباهای دائمی، شکاف هوایی، هسته استاتور و ناحیه بیرونی تقسیم شده و سپس معادلات دیفرانسیلی لاپلاسی / شبه پواسونی میدان مغناطیسی در سیستم مختصات قطبی با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها، سری تیلور و بسط سری فوریه در این زیر دامنه ها فرمول بندی و حل شده و نهایتاً یک رابطه تحلیلی وابسته به متغیرهای هندسی و جنس مواد بکار رفته در موتور تحت مطالعه به منظور تخمین اندازه چگالی میدان در ناحیه بیرونی موتور ارائه شده است. نتایج نشان می دهد که مدل سازی انجام شده برای استفاده در برنامه های طراحی، به منظور اجتناب از محاسبات طولانی مدت شبیه سازی های المان محدود مناسب خواهد بود. همچنین مدل سازی میدان های مغناطیسی اطراف یک موتور سنکرون مغناطیس دائم به منظور کنترل و تشخیص عیب در کاربردهای عملی قابل بهره برداری خواهد بود.

**واژه های کلیدی:** ماشین سنکرون مغناطیس دائم، مدل سازی زیردامنه، معادلات لاپلاس، معادلات پواسون

**نوع مقاله:** پژوهشی

DOI: 10.61186/jiaeee.21.2.87

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۵/۰۶

تاریخ پذیرش مشروط مقاله: ۱۴۰۲/۰۶/۲۰

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۷/۰۳

نام نویسنده ی مسئول: دکتر محمود حسینی علی آبادی

نشانی نویسنده ی مسئول: تهران - خیابان اشرفی اصفهانی، بالاتر از میدان پونک، بلوار امام حسن مجتبی (ع) - مجتمع دانشگاهی آیت اله هاشمی رفسنجانی - دانشکده فنی و مهندسی - گروه برق

## ۱- مقدمه

ماشین‌های الکتریکی تجهیزات مهمی هستند که انرژی الکتریکی را به کار مکانیکی تبدیل می‌کنند و به‌طور گسترده‌ای هم‌زمان با رشد اقتصادی در صنعت و زندگی مردم استفاده می‌شوند و موجب افزایش سطح کیفیت زندگی شده‌اند. مشخصه‌های عملکردی بالاتر برای ماشین‌های الکتریکی همواره در نظر مهندسين و طراحان ماشین‌های الکتریکی مطرح بوده است.

هرگونه بروز عیب در ماشین‌های الکتریکی می‌تواند باعث عدم تقارن در میدان‌های مغناطیسی در حوزه‌های مختلف ماشین شده و این عدم تقارن میدان مغناطیسی می‌تواند با قسمت‌های مکانیکی ارتباط متقابل داشته باشد و با ایجاد نیروی مغناطیسی نامتعادل باعث تولید ارتعاش در ماشین‌های الکتریکی شود. این نیروهای نامتقارن بر رفتار دینامیکی ماشین تأثیر گذاشته و ضمن ایجاد ارتعاش باعث بروز سروصدای مضر می‌خواهند شد.

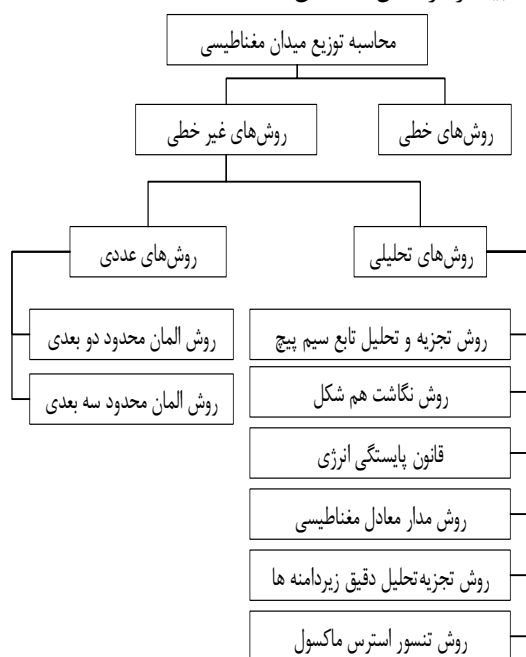
محدوده لرزش و سروصدای ماشین‌های الکتریکی یکی از شاخص‌های مهم در طراحی ماشین‌های الکتریکی محسوب می‌شود. لرزش و سروصدا بر زندگی روزمره مردم تأثیر می‌گذارد بطوریکه با رشد استانداردهای زندگی، مردم به لرزش ماشین‌های الکتریکی توجه بیشتری می‌کنند لذا استانداردهای بین‌المللی محدوده مجاز ارتعاش و سروصدای ناشی از چرخش ماشین‌های الکتریکی را تعیین کرده‌اند.

مقدار نیروی مغناطیسی نامتقارن به عوامل زیادی بستگی دارد و روش‌های محاسباتی موجود نیز بر اساس برخی مفروضات است. با توجه به این‌که پیشنهاد یک مدل دقیق کامل، دشوار است و ممکن است بسیار پیچیده باشد، برخی از عوامل تأثیرگذار کلیدی بدین منظور مورد نیاز است. بر اساس مطالعات مروری انجام‌شده، عوامل نسبتاً مهم عبارت‌اند از اشباع آهنربا، ترکیب شیار و قطب و اثرات بارگذاری. با توجه به این‌که محاسبه دقیق نیروی مغناطیسی نامتقارن پیچیده است لذا به نظر می‌رسد پژوهش در این زمینه جهت اکتشاف حقایق بیشتر امری ضروری است. بررسی‌ها حاکی از آن است که محاسبه نیروی مغناطیسی همچنان مورد تمرکز پژوهش‌های آینده است.

لازم به ذکر است که طراحی و مدل‌سازی اجزاء مختلف ماشین‌های الکتریکی یک مسئله چند رشته‌ای است؛ زیرا با مسائل الکترومغناطیس، ساختارهای مکانیکی و انتقال گرما درگیر است که فرایند طراحی بهینه را پیچیده‌تر می‌کند [۱-۴]. بنابراین ضروری است که بجای بهینه‌سازی اجزای مختلف مانند موتورها یا کنترل‌کننده‌ها به دنبال بهینه‌سازی مشخصه‌های عملکردی سیستم باشیم، زیرا جمع‌آوری اجزای بهینه‌سازی شده به‌صورت یک سیستم نمی‌تواند عملکرد مطلوب را برای کل سیستم فراهم کند [۱، ۵]. این مسئله واقعاً یک چالش برای جوامع تحقیقاتی و صنعتی است؛ زیرا این نه‌تنها

طراحی و تجزیه و تحلیل چندجانبه نظری (مانند الکترومغناطیسی، حرارتی، تجزیه و تحلیل مکانیکی و الکترونیک قدرت) بلکه همچنین مستلزم طراحی مهندسی عملی (تجربی) سیستم است. لی و همکاران [۶] یک رویکرد قوی برای بهینه‌سازی سطوح مختلف در ماشین‌های الکتریکی ارائه کردند. خان و همکاران [۷] چارچوب بهینه‌سازی طراحی چندمرحله‌ای را برای بهبود کارایی روش پیشنهادی با ترکیب چندین تکنیک مانند طراحی آزمایش‌ها و مدل‌های تقریبی ارائه کرد.

به‌طور کلی روش‌های مختلف برای محاسبه توزیع میدان‌های مغناطیسی در موتورهای الکتریکی به سه دسته روش‌های تحلیلی، روش‌های عددی و روش‌های ترکیبی دسته‌بندی می‌شوند که با جزئیات بیشتر در شکل (۱) نشان داده شده است [۸-۱۳].



شکل (۱): روش‌های مختلف محاسبه میدان مغناطیسی در ماشین‌های الکتریکی

در روش تجزیه و تحلیل دقیق زیر دامنه ماشین الکتریکی به چندین زیر دامنه تقسیم می‌شود و هر زیر دامنه به‌طور دقیق حل می‌شود. بر اساس شکل (۲) دامنه‌های قابل حل در این روش به چند بخش مختلف اعم از فاصله هوایی، هسته استاتور، هسته روتور، ناحیه مرزی بیرونی و حوزه آهنربای دائمی تقسیم می‌شود [۱۴-۱۸]. برای محاسبه میدان توزیع شده در فاصله هوایی، در این روش فرض می‌شود که نفوذپذیری آهن استاتور و روتور بی‌نهایت است و از اشباع و اثر انتهایی صرف‌نظر می‌شود.

خطای مدار باز را ارائه داده است. کومار و همکاران [۲۶] یک مدل تحلیلی بهبود یافته را با توسعه شکاف هوای لحظه‌ای برای محاسبه توزیع میدان مغناطیسی دائمی موتور DC بدون جاروبک پیشنهاد کرد. نویسندگان در [۲۷] با استفاده از روش مدل سازی زیر دامنه به منظور مدل سازی میدان مغناطیسی اطراف یک موتور سنکرون مغناطیسی با در نظر گرفتن اثر ناهم محوری روتور و استاتور بر اساس تکنیک پرتو بایشن روشی را برای تشخیص عیب اکسنتریسیته از محیط بیرون موتور تحت مطالعه پیشنهاد نمودند. همچنین بررسی تأثیر پارامترهای هندسی و جنس مواد بر نحوه توزیع چگالی میدان مغناطیسی در یک موتور سنکرون مغناطیس دائم از طریق مدل سازی تحلیلی توسط نویسندگان در [۲۸] ارائه شده است، که در آن به منظور کاهش پیچیدگی‌های مسئله، موتور تحت مطالعه به دو زیر دامنه شامل آهنرباها و فاصله هوایی تقسیم و معادلات ماکسول درون این زیر دامنه‌ها با شرایط مرزی مشخص حل شده است و نهایتاً دو رابطه تحلیلی وابسته به متغیرهای هندسی و جنس مواد بکار رفته در موتور تحت مطالعه به منظور تخمین اندازه چگالی میدان در زیر دامنه‌های فوق ارائه شده است. محاسبات سریع و دقت قابل قبول در مدل سازی‌های تحلیلی از مزایای این روش نسبت به سایر روش‌ها یاد می‌شود [۱۰، ۱۱، ۲۹، ۳۰].

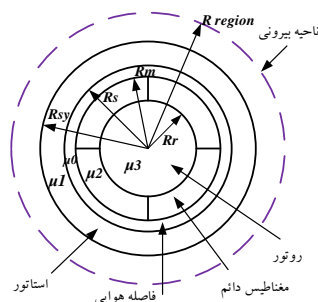
در این مقاله توزیع میدان مغناطیسی در نواحی مختلف یک موتور سنکرون مغناطیس دائم بر اساس روش مدل سازی زیر دامنه‌ها ارائه شده است. در مدل ارائه شده، حوزه‌های موتور فاصله هوایی، هسته استاتور، هسته روتور، ناحیه مرزی بیرونی و حوزه آهنربای دائمی در نظر گرفته می‌شود و با شرایط مرزی مشخص، معادلات ماکسول درون این ناحیه‌ها حل شده است. مدل سازی انجام شده فقط به پارامترهای هندسی و جنس مواد وابسته است که باعث می‌شود کاربرد آن را برای قرار دادن در برنامه‌های طراحی، به منظور اجتناب از محاسبات طولانی مدت توسط شبیه سازی‌های اجزای محدود مناسب باشد. روش مدل سازی مبتنی بر تخمین توزیع چگالی میدان مغناطیسی در هر ناحیه است که از حل معادلات میدان لاپلاسی / پواسون در مختصات قطبی به دست می‌آید.

این مقاله در چهار بخش سازمان دهی شده است، پس از مقدمه در بخش دوم فرضیات، معادلات حاکم، شرایط مرزی ارائه شده است. در بخش سوم نتایج شبیه سازی حاکی از حل معادلات به دست آمده ارائه شده است و در بخش چهارم به نتیجه گیری می‌پردازیم.

## ۲- فرضیات، معادلات حاکم و شرایط مرزی

فرضیاتی که در این تحقیق در نظر گرفته شده است که در بسیاری از مدل‌های مطالعاتی نیز وجود دارند به شرح زیر است:

- اثر شکاف‌ها و سیم پیچی استاتور نادیده گرفته می‌شود.
- نفوذ پذیری آهن استاتور و روتور معلوم و با منحنی B-H خطی در نظر گرفته می‌شوند.



شکل (۲): زیر دامنه‌های مختلف در ماشین‌های الکتریکی در روش تجزیه و تحلیل دقیق زیر دامنه‌ها

توزیع پتانسیل مغناطیسی اسکالر در فاصله هوایی، آهن استاتور، آهن روتور و منطقه بیرونی توسط معادله لاپلاس به دست می‌آید. در حالی که توزیع پتانسیل مغناطیسی اسکالر در حوزه مغناطیسی توسط معادله پواسون به دست می‌آید. این معادلات به شرح زیر بیان می‌شود:

$$-\frac{\partial^2 A_{ZA}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{ZA}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{ZA}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

$$-\frac{\partial^2 A_{ZM}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{ZM}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{ZM}}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\mu_2} \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (2)$$

$$-\frac{\partial^2 A_{ZS}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{ZS}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{ZS}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3)$$

$$-\frac{\partial^2 A_{ZR}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{ZR}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{ZR}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4)$$

$$-\frac{\partial^2 A_{ZO}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{ZO}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{ZO}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5)$$

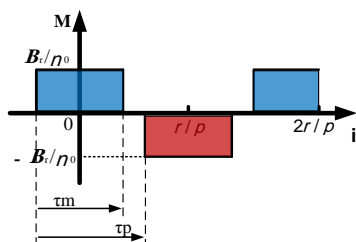
در روابط فوق  $r$  و  $\theta$  به ترتیب شعاع و زاویه زیر دامنه مورد بررسی در مختصات قطبی است و  $A_{ZO}$ ،  $A_{ZR}$ ،  $A_{ZS}$ ،  $A_{ZM}$ ،  $A_{ZA}$  به ترتیب نشان دهنده پتانسیل اسکالر مغناطیسی در فاصله هوایی، آهنربا، هسته استاتور، هسته روتور و منطقه بیرونی است. معادلات فوق معمولاً با روش جداسازی متغیر حل می‌شوند. بسیاری از محققان روش تجزیه و تحلیل دقیق زیر دامنه را برای بررسی توزیع میدان مغناطیسی در ماشین‌های الکتریکی مورد استفاده قرار می‌دهند. روش تجزیه و تحلیل دقیق زیر دامنه برای آهنرباهای مغناطیسی شعاعی یا موازی و همچنین برای سیم پیچ‌های استاتور متناظر با همپوشانی یا غوطه‌ور استفاده می‌شود. علاوه بر این، اثرات شکاف [۱۹-۲۱] و ترکیبات مختلف شیار و قطب [۱۴، ۲۲] را می‌توان در مدل تجزیه و تحلیل دقیق زیر دامنه مورد توجه قرار داد. وانگ در یک مطالعه خاص، پنج زیر حوزه را به دو حوزه شامل فاصله هوایی و آهنربا تقسیم و مورد بررسی قرار داد [۲۳]. همچنین ساده سازی‌هایی در برخی مطالعات سه حوزه شامل آهنربا، فاصله هوایی و شیارهای توسعه یافته بود [۲۴]. علاوه بر این، روش تجزیه و تحلیل دقیق زیر دامنه برای بسیاری از انواع ماشین‌های الکتریکی مانند ماشین‌های مغناطیسی بدون جاروبک و ماشین‌های آهنربای دائم مسطح مورد استفاده قرار می‌گیرد. رحید و همکاران [۲۵] یک سیستم مختصات قطبی برای تجزیه و تحلیل میدان فاصله هوایی، میدان سیم پیچی‌ها و میدان توزیع شده آهنربا را در یک موتور بدون شیار بدون جاروبک تحت

$$A_{zi}(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_{ni}r^{np} + B_{ni}r^{-np}). \cos np\theta \quad (13)$$

که در آن  $i = 1,2,4,5,6$  است. همچنین طبق رابطه (۷) معادلات حاکم در ناحیه آهنرباها به صورت زیر است.

$$\frac{\partial^2 A_{z3}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z3}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{z3}}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\mu_r} \nabla \cdot \vec{M} \quad (14)$$

در این رابطه بردار مغناطش آهنربا در حالتی که کمان آهنربا کوچکتر از گام قطب است به صورت شکل (۴) مدل سازی می شود.



شکل (۴): مغناطش شعاعی در حالتی که کمان آهنربا کوچکتر از گام قطب است

در مختصات قطبی بردار مغناطش به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$\vec{M} = M_r \hat{a}_r + M_\theta \hat{a}_\theta \quad (15)$$

$$M_r = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} M_n \cos(np\theta)$$

$$M_\theta = 0$$

$$M_n = 2 \frac{B_r}{\mu_0} \alpha_p \frac{\sin(n\pi\alpha_p/2)}{n\pi\alpha_p/2}$$

که در آن  $\tau_p$  گام قطب\* و  $\alpha_p$  نسبت کمان قطب آهنربا به گام قطب<sup>۱</sup> است و  $p$  تعداد زوج قطب هاست و  $\theta$  هم مبنایی برای مرکز یک قطب آهنرباست. همچنین فرض می شود که آهنربا به صورت شعاعی مغناطیس می شود، بنابراین مؤلفه مماسی مغناطش آهنربا صفر است.

$$\text{div } \vec{M} = \frac{M_r}{r} + \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} = \frac{M_r}{r} \quad (16)$$

بنابراین، رابطه (۱۴) به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\partial^2 A_{z3}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z3}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{z3}}{\partial \theta^2} \quad (17)$$

$$= \frac{1}{r\mu_{rm}} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} 2 \frac{B_r}{\mu_0} \alpha_p \frac{\sin(n\pi\alpha_p/2)}{n\pi\alpha_p/2} \cos(np\theta)$$

معادله فوق علاوه بر جواب عمومی یک جواب خصوصی نیز دارد. جواب خصوصی معادله فوق به صورت زیر است.

$$A_{z3} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} C_1 r \cos np\theta \quad (18)$$

با توجه به اینکه جواب خصوصی باید در معادله صدق کند لذا با جایگذاری رابطه (۱۸) در رابطه (۱۷) و مساوی قرار دادن دو طرف معادله، ثابت  $C_1$  به صورت زیر به دست می آید.

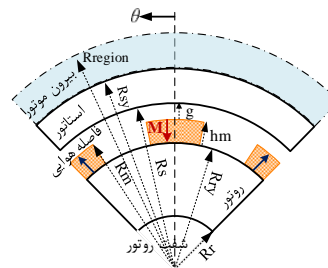
$$C_1 = - \frac{4B_r}{(np)^2 - 1} \frac{\alpha_p}{\mu_0 \mu_{rm} n\pi\alpha_p} \sin(n\pi\alpha_p/2) \quad (19)$$

بنابراین

$$A_{z3} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4B_r}{1-(np)^2} \frac{\alpha_p}{\mu_0 \mu_{rm} n\pi\alpha_p} \sin(n\pi\alpha_p/2) r \cos np\theta \quad (20)$$

بنابراین جواب کامل رابطه (۱۷) به صورت زیر به دست می آید.

- میدان مغناطیسی در مختصات قطبی مدل سازی می شود.
  - هر دو سطح یوغ روتور و آهنرباها به صورت استوانه ای هستند.
  - جریان گردابی و اثرات اشباع نادیده گرفته شده است.
- شکل (۳) و جدول (۱) پیکربندی هندسی، زیر دامنه های مختلف و پارامترهای مورد استفاده در مدل سازی موتور سنکرون آهنربای دائمی با آهنرباهای نصب شده روی سطح که برای تجزیه و تحلیل استفاده می شود را نشان می دهد.



شکل (۳): پیکربندی هندسی، زیر دامنه های مختلف و پارامترهای مورد استفاده در موتور تحت مطالعه

جدول (۱): تعریف نواحی مختلف ماشین تحت مطالعه

ناحیه	محل	موقعیت شعاعی
ناحیه ۱	شفت روتور	$0 < r \leq R_{yr}$
ناحیه ۲	یوغ روتور	$R_{yr} < r \leq R_r$
ناحیه ۳	آهنرباها	$R_r < r \leq R_m$
ناحیه ۴	فاصله هوایی	$R_m < r \leq R_s$
ناحیه ۵	یوغ استاتور	$R_s < r \leq R_{sy}$
ناحیه ۶	بیرون استاتور	$R_{sy} < r \leq R_{region}$

در این بخش معادلات کلی در مختصات قطبی، برای میدان مغناطیسی تولید شده توسط آهنرباهای دائمی ارائه می شود.

$$\nabla^2 A_z = 0 \quad (6) \quad \text{در ناحیه ۱ و ۲ و ۴ و ۵ و ۶}$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 \nabla \times \vec{M} \quad (7) \quad \text{در ناحیه ۳}$$

که در آن  $\mu_0$  پرمابیلیته هوا و  $\vec{M}$  بردار مغناطش آهنربا است.

بردارهای میدان  $\vec{B}$  و  $\vec{H}$  در نواحی مختلف به صورت زیر هستند.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (8) \quad \text{در ناحیه ۱ و ۴ و ۶}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_{rm} \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (9) \quad \text{در ناحیه ۳}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_{rc} \vec{H} \quad (10) \quad \text{در ناحیه ۲ و ۵}$$

که در آن داریم  $\vec{M} = \vec{B}_r / \mu_0$ ،  $B_r$  میدان پسماند آهنربا است، بردار مغناطش آهنربا،  $\mu_{rm} = \mu_0 \cdot \mu_r$  پرمابیلیته بازگشتی،  $\mu_r$  پرمابیلیته بازگشتی نسبی است.

می دانیم:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (11)$$

$$\vec{H}(r, \theta) = -\nabla A(r, \theta) = -\left(\frac{\partial A}{\partial r} \hat{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \hat{a}_\theta\right) \quad (12)$$

همان طور که قبلاً بیان شد در نواحی شفت روتور، هسته روتور، فاصله هوایی، هسته استاتور و محیط بیرون استاتور معادله حاکم بر مسئله به صورت رابطه (۶) می باشد، جواب کامل این معادله به صورت زیر است:

\* the pole-pitch

$$A_{n2}R_{ry}^{np-1} + B_{n2}R_{ry}^{-np-1} = A_{n3}R_{ry}^{np-1} + B_{n3}R_{ry}^{-np-1} + \frac{4B_r}{1-(np)^2} \frac{1}{\mu_0\mu_{rm}n^2p\pi} \quad (44)$$

$$\mu_0\mu_{rm}(-A_{n3}npR_m^{np-1} + B_{n3}npR_m^{-np-1}) - \frac{4B_r}{1-(np)^2} \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi\alpha_p/2) + 4 \frac{B_r}{n\pi} \sin(n\pi\alpha_p/2) \quad (45)$$

$$= \mu_0(-A_{n4}npR_m^{np-1} + B_{n4}npR_m^{-np-1}) + \frac{4B_r}{1-(np)^2} \frac{1}{\mu_0\mu_{rm}n\pi} \sin(n\pi\alpha_p/2) \quad (46)$$

$$= (A_{n4}R_m^{np-1} + B_{n4}R_m^{-np-1}) \cdot np$$

$$-A_{n4}npR_s^{np-1} + B_{n4}npR_s^{-np-1} = \mu_{rc}(-A_{n5}npR_s^{np-1} + B_{n5}npR_s^{-np-1}) \quad (47)$$

$$A_{n4}R_s^{np-1} + B_{n4}R_s^{-np-1} = A_{n5}R_s^{np-1} + B_{n5}R_s^{-np-1} \quad (48)$$

$$\mu_{rc}(-A_{n5}npR_{sy}^{np-1} + B_{n5}npR_{sy}^{-np-1}) = (-A_{n6}npR_{sy}^{np-1} + B_{n6}npR_{sy}^{-np-1}) \quad (49)$$

$$A_{n5}R_{sy}^{np-1} + B_{n5}R_{sy}^{-np-1} = A_{n6}R_{sy}^{np-1} + B_{n6}R_{sy}^{-np-1} \quad (50)$$

$$A_{n6}R_{region}^{np-1} + B_{n6}R_{region}^{-np-1} = 0 \quad (51)$$

### ۳- شبیه سازی و نتایج

پس از حل دستگاه ۱۲ معادله و ۱۲ مجهولی فوق (روابط ۴۰-۵۱)، ضرایب  $A_{ni}$  و  $B_{ni}$  برای  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  محاسبه و با توجه به ضرایب محاسبه شده فوق بردار پتانسیل اسکالر به راحتی به دست می آید و سپس طبق روابط مربوطه می توان شدت و چگالی میدان مغناطیسی را در هر ناحیه از موتور سنکرون مغناطیس دائم محاسبه نمود. پارامترهای اصلی موتور سنکرون مغناطیس دائم که به صورت شماتیک در شکل (۳) نشان داده شده است در جدول (۲) ارائه شده است.

جدول (۲): پارامترهای موتور تحت مطالعه

واحد	مقدار	نماد	پارامتر
---	۴	$2p$	تعداد قطب
---	۱	$\alpha_p$	نسبت کمان قطب به گام قطب
سانتیمتر	۱	$R_r$	شعاع شفت روتور
سانتیمتر	۳	$R_{ry}$	شعاع یوغ روتور
میلی متر	۵	$g$	طول فاصله هوایی
میلی متر	۵	$h_m$	ضخامت آهنربا
سانتیمتر	۴	$R_s$	شعاع داخلی استاتور
سانتیمتر	۶	$R_{sy}$	شعاع خارجی استاتور

$$A_{z3}(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_{n3}r^{np} + B_{n3}r^{-np}) \cdot \cos np\theta + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4B_r}{1-(np)^2} \frac{\alpha_p}{\mu_0\mu_{rm}n\pi\alpha_p} \sin(n\pi\alpha_p/2) r \cos np\theta \quad (21)$$

به طریق مشابه بردار پتانسیل اسکالر را در همه زیر دامنه ها می توان به طور خلاصه به صورت زیر نوشت:

$$A_{z1}(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_{n1}r^{np} + B_{n1}r^{-np}) \cdot \cos np\theta \quad (22)$$

$$A_{z2}(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_{n2}r^{np} + B_{n2}r^{-np}) \cdot \cos np\theta \quad (23)$$

$$A_{z3}(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_{n3}r^{np} + B_{n3}r^{-np}) \cdot \cos np\theta + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4B_r}{1-(np)^2} \frac{\alpha_p}{\mu_0\mu_{rm}n\pi\alpha_p} \sin(n\pi\alpha_p/2) r \cos np\theta \quad (24)$$

$$A_{z4}(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_{n4}r^{np} + B_{n4}r^{-np}) \cdot \cos np\theta \quad (25)$$

$$A_{z5}(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_{n5}r^{np} + B_{n5}r^{-np}) \cdot \cos np\theta \quad (26)$$

$$A_{z6}(r, \theta) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_{n6}r^{np} + B_{n6}r^{-np}) \cdot \cos np\theta \quad (27)$$

با مشخص شدن بردار پتانسیل اسکالر در هر زیر دامنه و از طرفی طبق رابطه (۱۱) و (۱۲) می توان معادله شدت و چگالی میدان مغناطیسی در هر زیر دامنه را به دست آورد. با مشخص شدن روابط مربوط به شدت و چگالی میدان مغناطیسی در هر زیر دامنه می توان شرایط مرزی را به صورت زیر برای موتور بکار برد. شرایط مرزی در موتور مورد مطالعه به صورت روابط زیر است.

$$H_{\theta 1}(r, \theta)|_{r=R_r} = 0 \quad \text{شرط ۱} \quad (28)$$

$$B_{r1}(r, \theta)|_{r=R_r} = B_{r2}(r, \theta)|_{r=R_r} \quad \text{شرط ۲} \quad (29)$$

$$H_{\theta 1}(r, \theta)|_{r=R_r} = H_{\theta 2}(r, \theta)|_{r=R_r} \quad \text{شرط ۳} \quad (30)$$

$$B_{r2}(r, \theta)|_{r=R_{ry}} = B_{r3}(r, \theta)|_{r=R_{ry}} \quad \text{شرط ۴} \quad (31)$$

$$H_{\theta 2}(r, \theta)|_{r=R_{ry}} = H_{\theta 3}(r, \theta)|_{r=R_{ry}} \quad \text{شرط ۵} \quad (32)$$

$$B_{r3}(r, \theta)|_{r=R_m} = B_{r4}(r, \theta)|_{r=R_m} \quad \text{شرط ۶} \quad (33)$$

$$H_{\theta 3}(r, \theta)|_{r=R_m} = H_{\theta 4}(r, \theta)|_{r=R_m} \quad \text{شرط ۷} \quad (34)$$

$$B_{r4}(r, \theta)|_{r=R_s} = B_{r5}(r, \theta)|_{r=R_s} \quad \text{شرط ۸} \quad (35)$$

$$H_{\theta 4}(r, \theta)|_{r=R_s} = H_{\theta 5}(r, \theta)|_{r=R_s} \quad \text{شرط ۹} \quad (36)$$

$$B_{r5}(r, \theta)|_{r=R_{sy}} = B_{r6}(r, \theta)|_{r=R_{sy}} \quad \text{شرط ۱۰} \quad (37)$$

$$H_{\theta 5}(r, \theta)|_{r=R_{sy}} = H_{\theta 6}(r, \theta)|_{r=R_{sy}} \quad \text{شرط ۱۱} \quad (38)$$

$$H_{\theta 6}(r, \theta)|_{r=R_{region}} = 0 \quad \text{شرط ۱۲} \quad (39)$$

پس از بسط شرایط مرزی فوق مجموعه شرطها به طور خلاصه به صورت زیر به دست می آیند. در اینجا دوازده معادله و دوازده مجهول داریم.

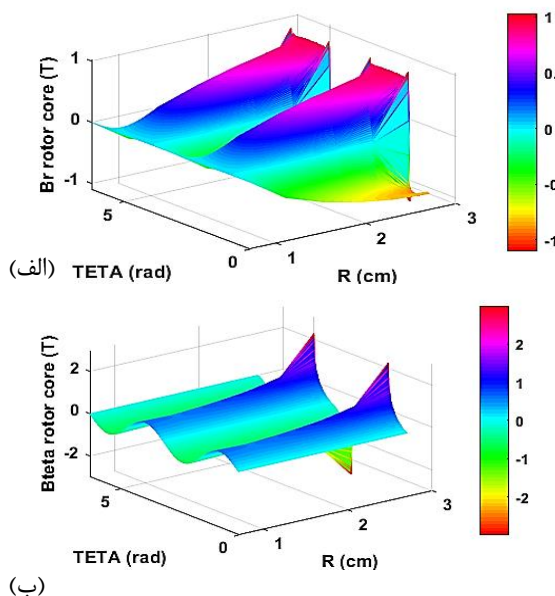
$$A_{n1}R_r^{np-1} + B_{n1}R_r^{-np-1} = 0 \quad (40)$$

$$-A_{n1}npR_r^{np-1} + B_{n1}npR_r^{-np-1} = \mu_{rc}(-A_{n2}npR_r^{np-1} + B_{n2}npR_r^{-np-1}) \quad (41)$$

$$A_{n1}R_r^{np-1} + B_{n1}R_r^{-np-1} = A_{n2}R_r^{np-1} + B_{n2}R_r^{-np-1} \quad (42)$$

$$\mu_0\mu_{rc}(-A_{n2}npR_{ry}^{np-1} + B_{n2}npR_{ry}^{-np-1}) = \mu_0\mu_{rm}(-A_{n3}npR_{ry}^{np-1} + B_{n3}npR_{ry}^{-np-1}) - \frac{4B_r}{1-(np)^2} \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi\alpha_p/2) + 4 \frac{B_r}{n\pi} \sin(n\pi\alpha_p/2) \quad (43)$$

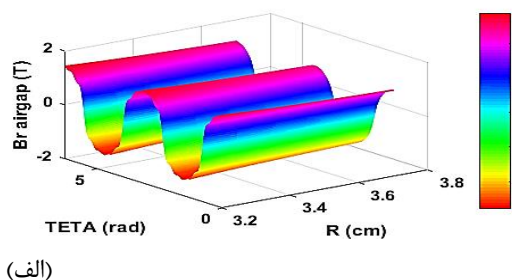
است. همان‌طور که در شکل مشخص شده است، اندازه چگالی میدان مغناطیسی با فاصله گرفتن از لبه داخلی استاتور به سمت بیرون آن کاهش می‌یابد و نهایتاً توزیع چگالی میدان نشتی به محیط بیرونی استاتور در شکل (۵-ت) محاسبه و ترسیم شده است. همان‌طور که در شکل مشخص است هرچه از سطح بیرونی استاتور دورتر شویم اندازه چگالی میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد. شکل (۶) به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی و مماسی چگالی میدان مغناطیسی در سطح هسته روتور را نشان می‌دهد.



شکل (۶): چگالی میدان مغناطیسی در ناحیه هسته روتور (الف) مؤلفه شعاعی (ب) مؤلفه مماسی

هسته روتور از شفت روتور به شعاع ۱ سانتیمتر تا لبه داخلی آهنرباهای چسبیده شده روی هسته روتور به شعاع ۳ سانتیمتر در کل محیط موتور  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  گسترده شده است. در این شکل اندازه چگالی میدان مغناطیسی در مرز بین شفت روتور و هسته روتور صفر و با فاصله گرفتن شعاعی از شفت روتور اندازه میدان مغناطیسی زیاد می‌شود.

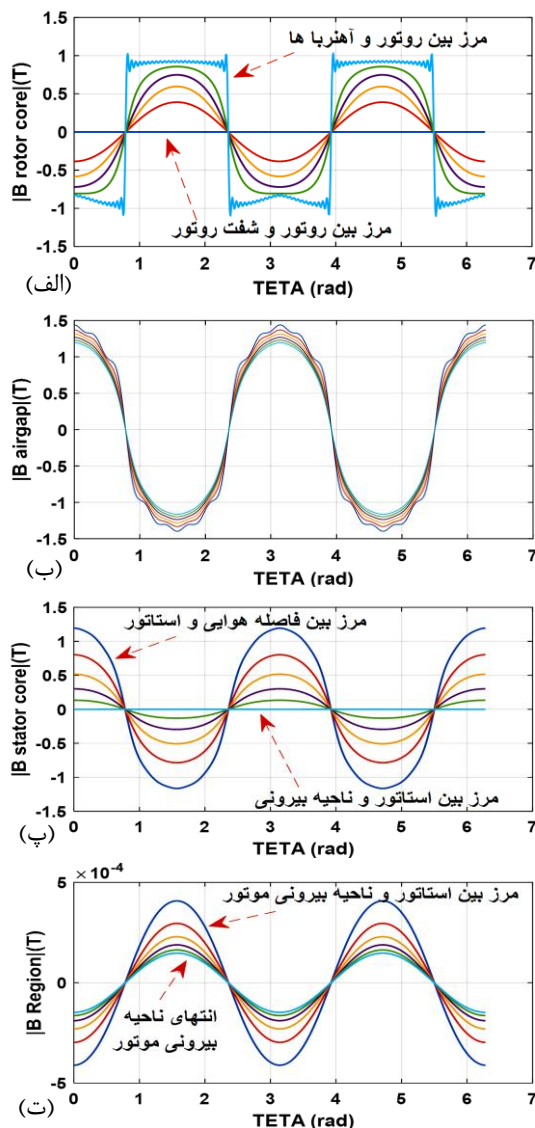
شکل (۷) به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی و مماسی چگالی میدان مغناطیسی در سطح فاصله هوایی را نشان می‌دهد. فاصله هوایی از لبه بیرونی آهنرباها به شعاع  $R_m$  شروع می‌شود و تا لبه داخلی استاتور به شعاع ۴ سانتیمتر در کل محیط موتور  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  گسترده شده است. اندازه مؤلفه‌های شعاعی و مماسی میدان مغناطیسی در این ناحیه توزیع متقارنی دارند.



(الف)

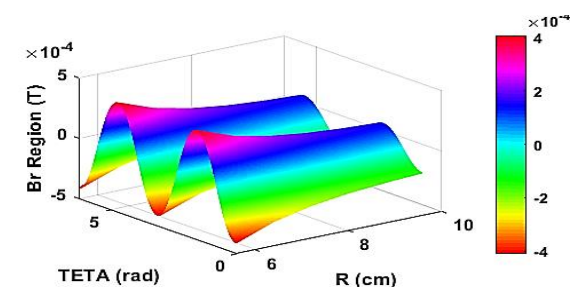
شعاع خارجی بیرون روتور	$R_{region}$	۱۰	سانتیمتر
شار باقیمانده آهنربا	$B_r$	۰/۹	تسلا
پرمابیلیته نسبی آهنربا	$\mu_{rm}$	۱/۰۵	---
پرمابیلیته نسبی آهنربا	$\mu_{rc}$	۱۰۰۰	---

اندازه چگالی میدان مغناطیسی در همه زیر دامنه‌ها در شکل (۵) نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که توزیع میدان در همه نقاط متقارن است.

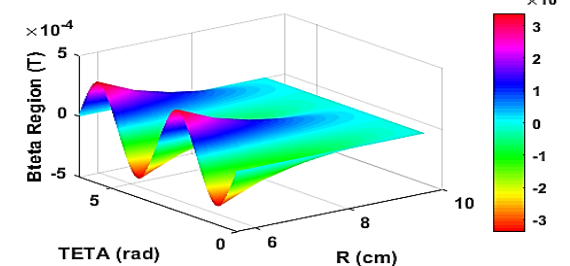


شکل (۵): اندازه چگالی میدان مغناطیسی درون هسته روتور (الف) هسته روتور (ب) فاصله هوایی (پ) هسته استاتور (ت) ناحیه بیرونی

شکل (۵-الف) نحوه توزیع چگالی میدان مغناطیسی در ناحیه هسته روتور را نشان می‌دهد. در این شکل اندازه چگالی میدان مغناطیسی در مرز بین شفت روتور و هسته روتور صفر و با فاصله گرفتن شعاعی از شفت روتور اندازه میدان زیاد می‌شود. شکل (۵-ب) نحوه توزیع میدان مغناطیسی به‌طور متقارن در فاصله هوایی را نشان می‌دهد. در شکل (۵-پ) توزیع میدان مغناطیسی در ناحیه استاتور نشان داده شده



(الف)



(ب)

شکل (۹): چگالی میدان مغناطیسی در ناحیه بیرون استاتور (الف) مؤلفه شعاعی (ب) مؤلفه مماسی

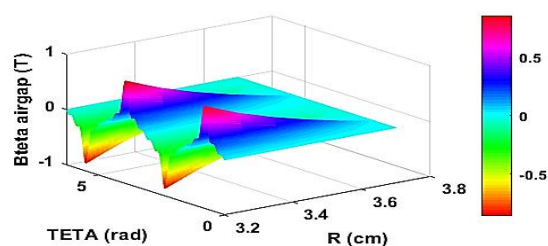
مقایسه بین مدت زمان اجرای شبیه سازی در دو روش مدلسازی تحلیلی و المان محدود در جدول (۳) نشان داده شده است.

جدول (۳): مقایسه مدت زمان اجرای شبیه سازی در دو روش مدلسازی تحلیلی و المان محدود

روش شبیه سازی	مدلسازی تحلیلی	شبیه سازی المان محدود
زمان (ثانیه)	۱/۱۵	۳۶۰۰

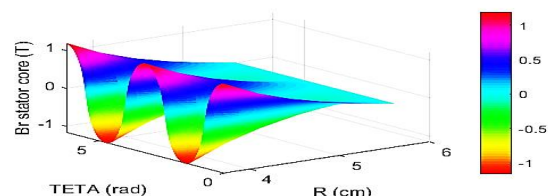
مدت زمان لازم برای اجرای کد روابط تحلیلی در این مطالعه در یک لپ‌تاپ مدل LENOVO ideapad 320 با پروسسور AMD FX-9800P و RADEON R7, 12 COMPUTE CORES 4C+8G 2.70 GHZ و ویندوز ۱۰، ۶۴ بیتی در نرم‌افزار MATLAB 2018b، ۱/۱۵ ثانیه انجام شد، در حالیکه پرواضح است چنین محاسباتی در نرم‌افزارهای شبیه‌سازی المان محدود مثل Maxwell 16.0 در همین کامپیوتر حداقل یک ساعت زمان نیاز دارد.

ژانگ و همکاران در [۱۰] یک مدلسازی تحلیلی در موتورهای سنکرون مغناطیس دائم با در نظر گرفتن عیب مغناطیس زدایی انجام داده‌اند و همان‌طور که در جدول شماره ۶ این مرجع آمده است مدت زمان اجرای محاسبات تحلیلی بسیار کمتر از شبیه‌سازی‌های المان محدود و با نسبت ۱:۲۰ بدست آمده است؛ بنابراین مدلسازی تحلیلی در مقایسه با روش‌های دیگر، سرعت محاسبه سریع و از دقت قابل قبولی برخوردار بوده و می‌تواند مرجعی برای تشخیص، پیش‌بینی و برنامه‌ریزی تعمیر و نگهداری به‌موقع باشد.

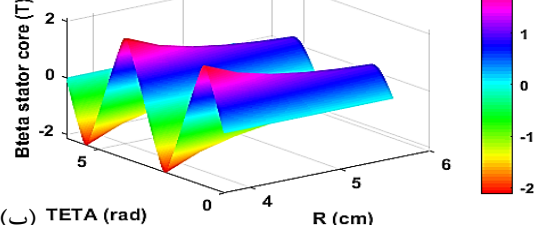


شکل (۷): چگالی میدان مغناطیسی در ناحیه فاصله هوایی (الف) مؤلفه شعاعی (ب) مؤلفه مماسی

شکل (۸) به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی و مماسی چگالی میدان مغناطیسی در سطح هسته استاتور را نشان می‌دهد. هسته استاتور از لبه داخلی آن به شعاع ۴ سانتیمتر شروع می‌شود و تا لبه خارجی آن به شعاع ۶ سانتیمتر در کل محیط موتور  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  گسترده شده است. علیرغم اینکه اندازه مؤلفه‌های شعاعی و مماسی میدان مغناطیسی در این ناحیه توزیع متقارنی دارند، اما پرواضح است که با نزدیک شدن به لبه خارجی استاتور اندازه چگالی میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد.



(الف)



(ب)

شکل (۸): چگالی میدان مغناطیسی در ناحیه استاتور (الف) مؤلفه شعاعی (ب) مؤلفه مماسی

شکل (۹) به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی و مماسی چگالی میدان مغناطیسی در ناحیه بیرونی موتور را نشان می‌دهد. ناحیه بیرونی موتور از لبه خارجی استاتور به شعاع ۶ سانتیمتر شروع می‌شود و تا مرز انتهایی فرض شده به شعاع ۱۰ سانتیمتر در کل فضای اطراف موتور  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  گسترده شده است. علیرغم اینکه اندازه مؤلفه‌های شعاعی و مماسی میدان مغناطیسی در این ناحیه توزیع متقارنی دارند، اما پرواضح است که با دور شدن از سطح استاتور اندازه چگالی میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد. اگرچه دامنه آن کم است، اما می‌تواند معیاری برای تشخیص عیوب مکانیکی داخلی موتور مثلاً اکسنتریسیته یا تخمین سرعت یا موقعیت روتور محسوب گردد.

## ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله توزیع میدان مغناطیسی در پنج ناحیه شامل هسته روتور، آهنرباها، فاصله هوایی، هسته استاتور و فضای بیرونی یک موتور سنکرون مغناطیس دائم با آهنرباهای چسبیده روی روتور بر اساس روش مدل‌سازی زیر دامنه‌ها ارائه شده است. در مدل ارائه شده، معادلات ماکسول حاکم بر حوزه‌های مختلف موتور با شرایط مرزی مشخص از طریق روش جداسازی متغیرها حل شده است. مدل‌سازی انجام شده فقط به پارامترهای هندسی و جنس مواد وابسته است که باعث می‌شود کاربرد آن را برای قرار دادن در برنامه‌های طراحی، به‌منظور اجتناب از محاسبات طولانی مدت توسط شبیه‌سازی‌های اجزای محدود مناسب باشد. روش مدل‌سازی مبتنی بر تخمین توزیع چگالی میدان مغناطیسی در هر ناحیه است که از حل معادلات میدان لاپلاسی/ پواسون در مختصات قطبی به دست می‌آید. از روش پیشنهادی در تخمین توزیع میدان‌های مغناطیسی در حوزه‌های ماشین در شناسایی و تشخیص خطاهای مکانیکی و الکتریکی یا تخمین سرعت و موقعیت در ماشین‌های سنکرون مغناطیس دائم و همچنین در طراحی بهینه ماشین‌های الکتریکی می‌توان استفاده نمود.

## مراجع

- Torque and Back EMF in the Mass Production of the Permanent-Magnet Synchronous Motors", IEEE Transactions on Industry Applications, vol. 50, no. 1, pp. 346-355, 2014, doi: 10.1109/TIA.2013.2271473.
- [8] S. Li, W. Tong, S. Wu, and R. Tang, "Analytical Model for Electromagnetic Performance Prediction of IPM Motors Considering Different Rotor Topologies", IEEE Transactions on Industry Applications, pp. 1-10, 2023, doi: 10.1109/TIA.2023.3268639.
- [9] B. Guo, Z. Djelloul-Khedda, and F. Dubas, "Nonlinear Analytical Solution in Axial Flux Permanent Magnet Machines using Scalar Potential", IEEE Transactions on Industrial Electronics, pp. 1-10, 2023, doi: 10.1109/TIE.2023.3273247.
- [10] C. Shi, L. Peng, Z. Zhang, and T. Shi, "Analytical Modeling and Analysis of Permanent-Magnet Motor with Demagnetization Fault", Sensors, vol. 22, no. 23, p. 9440, 2022. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/1424-8220/22/23/9440>.
- [11] F. Rezaee-Alam, M. Hosseini, and B. Rezaeealam, "A new hybrid analytical model for electromagnetic analysis of wound rotor induction motors", International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, vol. 35, no. 6, p. e3022, 2022, doi: <https://doi.org/10.1002/jnm.3022>.
- [12] Z. Li, X. Huang, Y. Yu, D. Jiang, L. Wu, and T. Shi, "Nonlinear Analytical Modelling for Surface-Mounted Permanent Magnet Motors with Magnet Defect Fault", IEEE Transactions on Energy Conversion, pp. 1-1, 2022, doi: 10.1109/TEC.2022.3145637.
- [13] Z. Djelloul Khedda, K. Boughrara, F. Dubas, B. Guo, and E. H. Ailam, "Two-dimensional steady-state thermal analytical model of permanent-magnet synchronous machines operating in generator mode", COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, vol. 41, no. 1, pp. 125-154, 2022, doi: 10.1108/COMPEL-07-2021-0226.
- [14] A. Abbas and A. Iqbal, "A subdomain model for armature reaction field and open-circuit field prediction in consequent pole permanent magnet machines", International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, vol. 35, no. 6, p. e3023, 2022, doi: <https://doi.org/10.1002/jnm.3023>.
- [15] M. Zhu, L. Wu, D. Wang, Y. Fang, and P. Tan, "Analytical prediction of electromagnetic performance of dual-stator consequent-pole PM machines based on subdomain model accounting for tooth-tips", COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering, vol. 40, no. 3, pp. 289-308, 2021, doi: 10.1108/COMPEL-01-2020-0063.
- [16] W. Ullah, F. Khan, E. Sulaiman, I. Sami, and J. S. Ro, "Analytical Sub-Domain Model for Magnetic Field Computation in Segmented Permanent Magnet Switched Flux Consequent Pole Machine", IEEE Access, vol. 9, pp. 3774-3783, 2021, doi: 10.1109/ACCESS.2020.3047742.
- [17] C. Tang, M. Shen, Y. Fang, and P. D. Pfister, "Comparison of Subdomain, Complex Permeance, and Relative Permeance Models for a Wide Family of Permanent-Magnet Machines", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 57, no. 2, pp. 1-5, 2021, doi: 10.1109/TMAG.2020.3009416.
- [18] A. Jabbari and F. Dubas, "Analytical Modelling of Magnetic Field Distribution in Spoke Type Permanent Magnet Machines", (in eng), Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers,
- [1] Z. Xing, X. Wang, W. Zhao, X. Li, L. Xiong, and X. Zhang, "Optimization Design of Interior Permanent Magnet Synchronous Motor with U-Shaped Rotor for Low-Level Torque Ripple and Electromagnetic Vibration", IEEE Transactions on Transportation Electrification, pp. 1-1, 2023, doi: 10.1109/TTE.2023.3288892.
- [2] G. Lei, J. Zhu, Y. Guo, C. Liu, and B. Ma, "A Review of Design Optimization Methods for Electrical Machines", Energies, vol. 10, no. 12, p. 1962, 2017, doi: <https://doi.org/10.3390/en10121962>.
- [3] A. Shiri and S. D. Sadr, "Design Optimization and Construction of Double-Sided Linear Induction Motor", (in eng), Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers, Research vol. 19, no. 4, pp. 185-193, 2022, doi: 10.52547/jiaee.19.4.185.
- [4] m. d. kheiri and a. tavakoli, "Adaptive and intelligent control of permanent magnet synchronous motor (PMSM) using a combination of fuzzy logic and gray wolf algorithm under fault condition", (in eng), Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers, Research vol. 19, no. 4, pp. 105-116, 2022, doi: 10.52547/jiaee.19.4.105.
- [5] C. Lee and I. G. Jang, "Topology Optimization of the IPMSMs Considering Both the MTPA and FW Controls Under the Voltage and Current Limitations", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 70, no. 8, pp. 8244-8253, 2023, doi: 10.1109/TIE.2023.3234136.
- [6] G. Lei, T. Wang, J. Zhu, Y. Guo, and S. Wang, "System-Level Design Optimization Method for Electrical Drive Systems—Robust Approach", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 62, no. 8, pp. 4702-4713, 2015, doi: 10.1109/TIE.2015.2404305.
- [7] M. A. Khan, I. Husain, M. R. Islam, and J. T. Klass, "Design of Experiments to Address Manufacturing Tolerances and Process Variations Influencing Cogging



[30] M. Rostami, P. Naderi, and A. Shiri, "Intern-turn fault modeling and diagnosis in permanent magnet vernier machine using modified magnetic equivalent circuit method", *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. 41, no. 1, pp. 410-426, 2022, doi: 10.1108/COMPEL-06-2021-0201.

## زیر نویس ها

<sup>1</sup> the magnet pole-arc to pole-pitch ratio

- Research vol. 17, no. 3, pp. 141-151, 2020. [Online]. Available: <http://jiaeee.com/article-1-423-fa.html>.
- [19] T. Lubin, S. Mezani, and A. Rezzoug, "Exact Analytical Method for Magnetic Field Computation in the Air Gap of Cylindrical Electrical Machines Considering Slotting Effects", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, no. 4, pp. 1092-1099, 2010, doi: 10.1109/TMAG.2009.2036257.
- [20] J. Fu and C. Zhu, "Subdomain Model for Predicting Magnetic Field in Slotted Surface Mounted Permanent-Magnet Machines With Rotor Eccentricity", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 48, no. 5, pp. 1906-1917, 2012, doi: 10.1109/TMAG.2011.2178250.
- [21] V. Z. Faradonbeh, A. Rahideh, M. M. Ghahfarokhi, E. Amiri, A. D. Aliabad, and G. A. Markadeh, "Analytical Modeling of Slotted, Surface-Mounted Permanent Magnet Synchronous Motors With Different Rotor Frames and Magnet Shapes", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 57, no. 1, pp. 1-13, 2021, doi: 10.1109/TMAG.2020.3032648.
- [22] Z. Q. Zhu, L. J. Wu, and Z. P. Xia, "An Accurate Subdomain Model for Magnetic Field Computation in Slotted Surface-Mounted Permanent-Magnet Machines", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, no. 4, pp. 1100-1115, 2010, doi: 10.1109/TMAG.2009.2038153.
- [23] W. Xinghua, L. Qingfu, W. Shuhong, and L. Qunfeng, "Analytical calculation of air-gap magnetic field distribution and instantaneous characteristics of brushless DC motors", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 18, no. 3, pp. 424-432, 2003, doi: 10.1109/TEC.2003.815852.
- [24] L. J. Wu, Z. Q. Zhu, D. Staton, M. Popescu, and D. Hawkins, "Subdomain Model for Predicting Armature Reaction Field of Surface-Mounted Permanent-Magnet Machines Accounting for Tooth-Tips", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 47, no. 4, pp. 812-822, 2011, doi: 10.1109/TMAG.2011.2104969.
- [25] A. Rahideh and T. Korakianitis, "Analytical Open-Circuit Magnetic Field Distribution of Slotless Brushless Permanent-Magnet Machines With Rotor Eccentricity", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 47, no. 12, pp. 4791-4808, 2011, doi: 10.1109/TMAG.2011.2159987.
- [26] P. Kumar and P. Bauer, "Improved analytical model of a permanent-magnet brushless DC motor", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, no. 10, pp. 2299-2309, 2008.
- [27] S. R. Mortezaei, M. H. Aliabadi, and S. Javadi, "Analytical calculation and finite element evaluation of electromagnetic leakage field distribution in surface-mounted permanent magnet synchronous motors taking the rotor eccentricity effect into account", *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. ahead-of-print, no. ahead-of-print, 2021, doi: 10.1108/COMPEL-05-2021-0171.
- [28] r. mortezaei, M. Hosseini Aliabadi, and S. Javadi, "The effect of geometrical parameters and materials on the distribution of magnetic field density in a permanent magnet synchronous motor through analytical modeling", *Iranian journal of Marine technology*, pp. -, 2023, doi: 10.22034/ijmt.2023.544047.1805.
- [29] M. Rostami, P. Naderi, and A. Shiri, "Modelling and analysis of permanent magnet vernier machine using flexible magnetic equivalent circuit method", *IET Science, Measurement & Technology*, vol. 16, no. 3, pp. 160-170, 2022.