

کاهش موثر تر پهنای باند ماتریس‌های متقارن تنک هنگام استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری

بهروز کوهستانی^۱

۱- استادیار - دانشگاه تبریز - دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - تبریز - ایران

b.koohestani@tabrizu.ac.ir

چکیده: ماتریس‌های تنک در بسیاری از مسائل مرتبط با علوم و مهندسی ظاهر می‌شوند. عملکرد الگوریتم‌های طراحی شده برای حل کردن چنین مسائلی وابستگی زیادی به پهنای باند ماتریس مسئله دارد. پهنای باند یک ماتریس متقارن برابر است با فاصله‌ای از قطر اصلی ماتریس که فراتر از آن تمام درایه‌های آن ماتریس صفر هستند. کمینه کردن پهنای باند یک ماتریس مسئله‌ای آن پی-کامل است. با توجه به اهمیت این مسئله، تاکنون الگوریتم‌های بسیاری برای حل آن ارائه شده‌اند که از میان آنها الگوریتم‌های فراابتکاری عملکرد بسیار بهتری در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها از خود نشان داده‌اند. مشکلی که در بکارگیری الگوریتم‌های فراابتکاری برای حل این مسئله وجود دارد این است که میزان پهنای باند که تقریباً در همه مطالعه‌های پیشین از آن برای مقایسه کیفیت جواب‌های تولید شده توسط این الگوریتم‌ها استفاده شده است، معیار مناسبی نیست و به همین دلیل نمی‌تواند فرآیند جستجو را به سمت جواب‌هایی با کیفیت بالا هدایت کند. در این تحقیق، مشکل مذکور مورد بررسی قرار گرفته و برای رفع آن معیار دیگری ارائه می‌شود تا به جای پهنای باند مورد استفاده قرار بگیرد. این معیار به نوعی از اطلاعات پهنای باند و پروفایل ماتریس که کمیتی مهم است و با پهنای باند ماتریس ارتباط تنگاتنگی دارد، بطور همزمان استفاده می‌کند. برای ارزیابی کارایی معیار پیشنهادی، یک الگوریتم ژنتیک برای حل مسئله کمینه سازی پهنای باند طراحی و معیار جدید و معیار پهنای باند در تابع ارزیابی آن مورد استفاده قرار می‌گیرند. نتایج بدست آمده از آزمایش‌های عددی بر روی ماتریس‌های متقارن تنک استاندارد نشان می‌دهند که میزان پهنای باند بدست آمده با استفاده از معیار پیشنهادی حدود ۳۳ تا ۵۲ درصد کمتر از برابر پهنای باند بدست آمده توسط معیار رایج برای نمونه‌های تحت بررسی است. این کاهش بسیار قابل توجه است و نشان می‌دهد که با استفاده از معیار پیشنهادی میتوان به طرز موثرتری پهنای باند ماتریس‌های تنک را کاهش داد.

واژه‌های کلیدی: ماتریس تنک، پهنای باند، پروفایل، الگوریتم‌های فراابتکاری، الگوریتم ژنتیک

نوع مقاله: پژوهشی

DOI: 10.29252/jiaee.18.4.181

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۹/۱۱

تاریخ پذیرش مشروط مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۰۳

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۰۱

نام نویسنده‌ی مسئول: دکتر بهروز کوهستانی

نشانی نویسنده‌ی مسئول: ایران - تبریز - بلوار ۲۹ بهمن - دانشگاه تبریز - دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

۱- مقدمه

سمت جواب‌هایی با کیفیت بالا هدایت کند. برای رفع این مشکل، رویکرد جدیدی نیز ارائه می‌شود و کارایی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. آزمایش‌های انجام شده نشان می‌دهند که رویکرد پیشنهادی بسیار موثر است و می‌تواند عملکرد الگوریتم‌های فراابتکاری را که برای کاهش پهنای باند مورد استفاده قرار می‌گیرند بطور قابل ملاحظه‌ای افزایش بدهد. ساختار این مقاله به شرح زیر است:

در بخش ۲، مسئله مورد بحث در این تحقیق بیان می‌شود. در بخش ۳، الگوریتم‌های فراابتکاری به اختصار معرفی می‌شوند. در بخش ۴، رویکرد پیشنهادی ارائه می‌شود. در بخش ۵، آزمایش‌های عددی انجام یافته مورد بررسی قرار می‌گیرند. در نهایت در بخش ۶، نتیجه گیری ارائه می‌شود.

۲- تعریف مسئله

اگر A یک ماتریس متقارن تنک $n \times n$ با درایه‌های a_{ij} باشد، پهنای باند آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(A) = \max_{(i,j): a_{ij} \neq 0} (i - j) \quad (1)$$

در رابطه فوق i به اندیس یک سطر از ماتریس و j به اندیس ستونی اولین درایه غیر صفر در سطر i اشاره می‌کند.

مسئله کمینه کردن پهنای باند ماتریس شامل یافتن جایگشتی از ردیف‌ها و ستون‌های A است که بتواند همه درایه‌های غیر صفر آن را در باریکترین نوار ممکن اطراف قطر اصلی ماتریس قرار دهد. به عبارت دیگر، این جایگشت باید بتواند همه درایه‌های غیر صفر ماتریس را هر چه نزدیکتر به قطر اصلی ماتریس قرار دهد.

پروفایل یک ماتریس نیز کمیتی بسیار مهم است که با پهنای باند ماتریس ارتباط تنگاتنگی دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(A) = n + \sum_{i=1}^n (i - j) \quad (2)$$

توجه به این نکته ضروری است که درایه‌های قطر اصلی ماتریس در محاسبات در نظر گرفته می‌شوند. شکل (۱) محاسبات پهنای باند و پروفایل را برای یک ماتریس نشان می‌دهد.

	1	2	3	4	5	6	(i - j)
1		0		0	0		(1 - 1) = 0
2	0		0			0	(2 - 2) = 0
3		0		0			(3 - 1) = 2
4	0		0		0	0	(4 - 2) = 2
5				0		0	(5 - 2) = 3
6		0		0	0		(6 - 1) = 5

$$B(A) = 5, \quad P(A) = 18$$

شکل (۱): محاسبات پهنای باند و پروفایل برای یک ماتریس فرضی

بسیاری از مسائل مرتبط با علوم و مهندسی به جواب یک دستگاه معادلات جبری خطی به شکل $Ax = b$ نیاز دارند که در آن A یک ماتریس تنک $n \times n$ با ساختاری متقارن (ماتریس ضرایب)، b یک بردار به طول n (بردار طرف دوم) و x یک بردار به طول n (بردار مجهولات) است. لازم به ذکر است که ماتریس تنک ماتریسی است که اکثر عناصر آن صفر باشند و ماتریس متقارن^۱ یک ماتریس مربعی است که خودش با ترانزپوزیشن برابر باشد. پهنای باند^۲ یک ماتریس متقارن نیز برابر است با فاصله‌ای از قطر اصلی ماتریس که فراتر از آن تمام درایه‌های آن ماتریس صفر هستند [۱].

یکی از روش‌های بسیار رایج برای حل دستگاه معادلات جبری خطی، استفاده از تکنیک‌های مستقیم^۳ است. تکنیک‌های مستقیم روش‌هایی هستند که با انجام تعداد محدودی از عملیات، راه حل دقیقی را برای یک مسئله ارائه می‌دهند. پیچیدگی زمانی تکنیک‌های مستقیم برای ماتریس ضرایب A ، $O(n^3)$ است در حالی که برای یک ماتریس نواری با پهنای باند β ، $O(\beta^2 n)$ است. به این ترتیب می‌توان صرفه جویی قابل توجهی در زمان محاسباتی حاصل کرد و طبیعتاً هر چه میزان پهنای باند ماتریس کمتر باشد، زمان محاسباتی مورد نیاز نیز کمتر خواهد بود [۲].

کمینه کردن پهنای باند یک ماتریس مسئله‌ای ان پی-کامل^۴ است. با توجه به اهمیت این مسئله، تاکنون الگوریتم‌های بسیاری برای حل آن ارائه شده‌اند که از میان آنها الگوریتم‌های فراابتکاری^۵ عملکرد بسیار بهتری در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها از خود نشان داده‌اند [۳].

در [۴] نخستین رویکرد ابتکاری^۶ برای کاهش پهنای باند ماتریس‌های تنک ارائه می‌شود. این الگوریتم همچنان یکی از پرکاربردترین الگوریتم‌ها برای کاهش پهنای باند است. نسخه‌های بهبود یافته الگوریتم مذکور و الگوریتم‌هایی با ساختارهایی پیچیده‌تر که از نظر نحوه عملکرد با این الگوریتم در یک کلاس قرار دارند نیز اخیراً پیشنهاد شده‌اند [۵-۹].

الگوریتم‌های فراابتکاری نیز به‌طور گسترده‌ای برای کاهش پهنای باند مورد استفاده قرار گرفته‌اند. به عنوان مثال، الگوریتم جستجوی ممنوعه^۸ [۱۰]، الگوریتم ژنتیک^۹ [۱۲، ۱۱]، الگوریتم بهینه‌سازی گروه مورچه‌ها^{۱۰} [۱۴، ۱۳]، الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات^{۱۱} [۱۶، ۱۵]، الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده^{۱۲} [۱۷]، الگوریتم BSO^{۱۳} [۱۸]، الگوریتم GRASP^{۱۴} [۱۹] و برنامه نویسی ژنتیک^{۱۵} [۲۰].

تا جایی که مولف توان و امکان بررسی منابع را داشته است، به نظر می‌رسد که تقریباً در همه مطالعه‌های پیشین از جمله موارد ذکر شده در بالا، میزان پهنای باند برای مقایسه کیفیت جواب‌های تولید شده توسط الگوریتم‌های فراابتکاری مورد استفاده قرار گرفته است. در این تحقیق نشان داده می‌شود که میزان پهنای باند معیار مناسبی برای این منظور نیست و به همین دلیل نمی‌تواند فرآیند جستجو را به

گام‌های اصلی در یک الگوریتم فراابتکاری کلاسیک عموماً عبارتند از: (۱) ایجاد یک جمعیت اولیه شامل راه‌حل‌های بالقوه/جواب‌های بالقوه مسئله تحت بررسی. (۲) محاسبه میزان شایستگی هر فرد در جمعیت. (۳) انتخاب افراد از جمعیت بر اساس میزان شایستگی. (۴) ایجاد یک جمعیت جدید با اعمال عملیاتی بر روی افراد انتخاب شده در مرحله قبل. (۵) تکرار مراحل دوم تا چهارم تا رسیدن به معیار توقف مورد نظر. (۶) معرفی بهترین فرد در جمعیت به عنوان خروجی الگوریتم.

الگوریتم ژنتیک، برنامه نویسی ژنتیک، الگوریتم بهینه‌سازی گروه مورچه‌ها و الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات از مهمترین و کارآمدترین الگوریتم‌های فراابتکاری به حساب می‌آیند. الگوریتم‌های فراابتکاری عملکرد بسیار خوبی در مواجهه با مسائل دشوار که روش‌های کلاسیک نتوانسته‌اند موفقیت چندانی در حل آنها به دست آورند و همچنین مسائل مهندسی از خود نشان داده‌اند [۲۱-۲۳].

۴- رویکرد پیشنهادی

همانطور که در بخش ۱ ذکر شد، الگوریتم‌های فراابتکاری به‌طور گسترده‌ای برای حل مسئله کمینه کردن پهنای باند ماتریس مورد استفاده قرار گرفته‌اند. چیزی که در همه این الگوریتم‌ها مشابه است، تابع ارزیابی آنها می‌باشد که بر اساس میزان پهنای باند ماتریس است. به عبارت دیگر، تابع ارزیابی این الگوریتم‌ها میزان پهنای باند حاصل از اعمال هر کدام از راه‌حل‌های تولید شده (جایگشت‌ها) به ماتریس مسئله را محاسبه می‌کند و سپس این میزان به عنوان معیاری برای مقایسه شایستگی راه‌حل‌های تولید شده مورد استفاده قرار می‌گیرد. چنین رویکردی در عین حال که در ظاهر کاملاً درست و منطقی به نظر می‌رسد، در واقع نقطه ضعف بزرگی دارد و آن اینکه میزان پهنای باند لزوماً نمی‌تواند عیار مناسبی برای مقایسه کیفیت راه‌حل‌ها و قضاوت در مورد میزان شایستگی آنها باشد. شکل‌های (۳)، (۴) و (۵) این موضوع را به تصویر می‌کشند.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	■	■								
2	■	■	■							
3		■	■	■						
4			■	■	■					
5				■	■	■				
6					■	■	■			
7						■	■	■		
8							■	■	■	
9								■	■	■
10									■	■

شکل (۳): یک ماتریس متقارن 10×10 با پهنای باند ۱

به عنوان مثال، اگر جایگشت (2, 5, 4, 3, 6, 1) به سطرها و ستون‌های ماتریس تعریف شده در شکل (۱) اعمال شود، ماتریس دیگری ایجاد می‌شود که پهنای باند و پروفایل آن با حالت قبلی متفاوت است. همانگونه که در شکل (۲) نشان داده می‌شود، در اثر اعمال جایگشت فوق، پهنای باند و پروفایل این ماتریس کاهش پیدا کرده است و درایه‌های غیر صفر آن به قطر اصلی ماتریس نزدیک شده‌اند.

	1	2	3	4	5	6	(i - j)
1				0	0	0	(1 - 1) = 0
2				0	0	0	(2 - 1) = 1
3				0		0	(3 - 1) = 2
4	0	0	0		0		(4 - 4) = 0
5	0	0		0			(5 - 3) = 2
6	0	0	0				(6 - 4) = 2

$$B(A) = 2, P(A) = 13$$

شکل (۲): محاسبات پهنای باند و پروفایل برای ماتریس تولید شده از اعمال جایگشت مذکور

۳- الگوریتم‌های فراابتکاری

در اکثر مسائل مطرح در هوش مصنوعی واژه بسیار رایجی به نام "حالت" (state) مورد استفاده قرار می‌گیرد. یک حالت عبارت است از وضعیت مسئله مورد بررسی در یک مرحله مشخص از فرآیند حل مسئله. یک روش عمومی برای حل مسائل هوش مصنوعی به این گونه است که ابتدا یک عملگر به یک حالت مفروض اعمال می‌شود تا حالت بعدی تولید شود. سپس عملگر دیگری به حالت به دست آمده در مرحله قبل اعمال می‌شود تا حالت جدیدی تولید شود و این روند ادامه پیدا می‌کند تا حالت مطلوب تولید شود.

در هوش مصنوعی، فرآیند کاوش برای زنجیره‌ای از عملیات که نهایتاً ما را از یک حالت اولیه به حالت هدف می‌رساند، جستجو (search) نامیده می‌شود و بدیهی است که الگوریتم بکار رفته برای این منظور نیز الگوریتم جستجو نامیده می‌شود. الگوریتم‌های فراابتکاری الگوریتم‌های جستجوی آگاهانه هستند. این الگوریتم‌ها، اطلاعاتی در باره حالت‌ها فراتر از آنچه که تعریف مسئله برای آنها فراهم کرده است در اختیار دارند. در واقع این استراتژی‌ها قادرند تا از بین دو حالت غیر هدف یکی را که به احتمال زیاد بهتر از دیگری است انتخاب کرده و گسترش دهند. برای این منظور، یک تابع ارزیابی در ساختار آنها وجود دارد که میزان شایستگی یک حالت را در مقایسه با سایر حالت‌ها تخمین می‌زند. در این روش جستجو، اصولاً هر حالتی که دارای شایستگی بیشتری در مقایسه با سایر حالت‌ها باشد، اولویت بیشتری برای انتخاب شدن و گسترش خواهد داشت.

اعمال الگوریتم‌های فراابتکاری به مسئله کمینه سازی پهنای باند ماتریس رخ می‌دهند و در صورتیکه پهنای باند معیار قضاوت در مورد شایستگی راه حل‌های تولید شده باشد، این قطعاً موجب کاهش عملکرد این الگوریتم‌ها می‌شود. در این تحقیق، معیار دیگری $(F(A))$ برای رفع این مشکل معرفی می‌شود، همانطور که در معادله (۳) نشان داده شده است.

$$F(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{(i,j): a_{ij} \neq 0} (i-j)^2 \quad (3)$$

در این رابطه، هر جمله در واقع پهنای باند یک ردیف از ماتریس است که به توان ۲ رسیده است و کاملاً واضح است که اگر توان را عدد ۱ انتخاب کنیم، این رابطه میزان پروفایل ماتریس را تولید می‌کند. در واقع، معیار جدید به نوعی از اطلاعات پهنای باند و پروفایل بطور همزمان استفاده می‌کند. برای ماتریس شکل (۳) که فرم ایده آل محسوب می‌شود و پهنای باند آن ۱ است، $F(A)$ برابر است با ۹. برای ماتریس شکل (۴) که پهنای باند آن ۸ است، $F(A)$ برابر است با ۱۴۳ و برای ماتریس شکل (۵) که پهنای باند آن با ماتریس شکل (۴) یکسان و برابر با ۸ است، $F(A)$ برابر است با ۱۳۴. به این ترتیب، معیار جدید به الگوریتم فراابتکاری کمک می‌کند تا جایگشتی که ماتریس شکل (۵) را تولید کرده است به عنوان راه حل بهتر، انتخاب کند. به عبارت دیگر، معیار جدید تفاوت شایستگی بین راه حل‌های تولید شده توسط یک الگوریتم فراابتکاری را با دقت بالاتری آشکار می‌کند و در نتیجه الگوریتم را قادر می‌سازد تا انتخاب‌های آگاهانه‌تر و صحیح‌تری انجام دهد.

۵- آزمایش‌های عددی

در این بخش، آزمایش‌های عددی انجام گرفته برای ارزیابی کارایی معیار پیشنهادی $(F(A))$ در برابر معیار پهنای باند $(B(A))$ ارائه می‌شوند. الگوریتم فراابتکاری انتخاب شده برای این آزمایش‌ها الگوریتم ژنتیک است که همچنان یکی از کارآمدترین الگوریتم‌های فراابتکاری به شمار می‌آید. ساختار کلی الگوریتم ژنتیک طراحی شده برای حل مسئله کمینه سازی پهنای باند به صورت زیر است:

۱. به‌طور تصادفی یک جمعیت اولیه از کروموزوم‌ها (جایگشت‌هایی از سطر/ستون ماتریس) را تولید کنید.
۲. تا زمانی که شرط توقف (به عنوان مثال، حداکثر تعداد نسل‌ها) برقرار نشده است، مراحل ۳-۶ را تکرار کنید.
۳. هر کدام از جایگشت‌ها در جمعیت جاری را به سطر و ستون ماتریس مسئله اعمال نموده و ماتریس‌های جدید متناظر با هر جایگشت را تولید کنید.
۴. میزان شایستگی هر کروموزوم (جایگشت) را با استفاده از تابع شایستگی محاسبه کنید.
۵. کروموزوم‌ها را بر اساس میزان شایستگی‌شان برای شرکت در عملیات ژنتیکی انتخاب کنید.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	■				■					
2		■					■			■
3			■					■		■
4				■		■		■		
5	■				■		■			
6						■			■	
7		■			■		■			
8			■	■				■		
9						■			■	
10		■	■							■

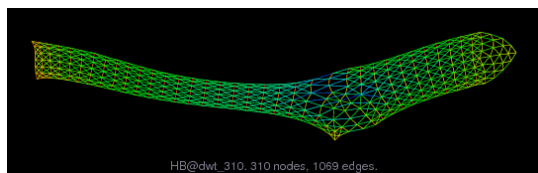
شکل (۴): یک ماتریس متقارن 10×10 با پهنای باند ۸

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	■									■
2		■	■							■
3			■	■						■
4				■	■					■
5					■	■				■
6						■	■			■
7							■	■		■
8								■	■	■
9	■								■	
10		■								■

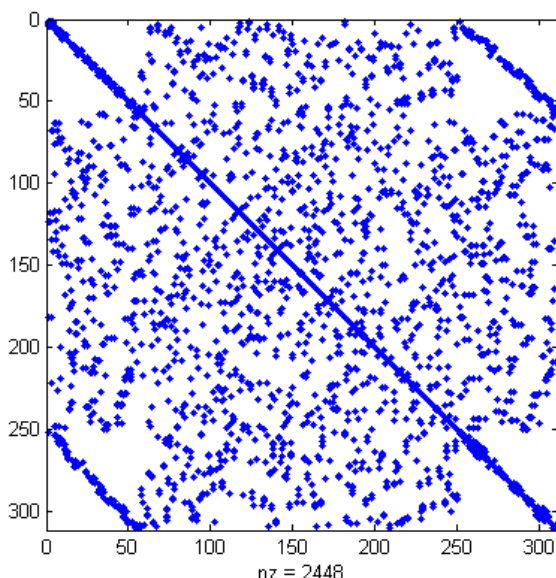
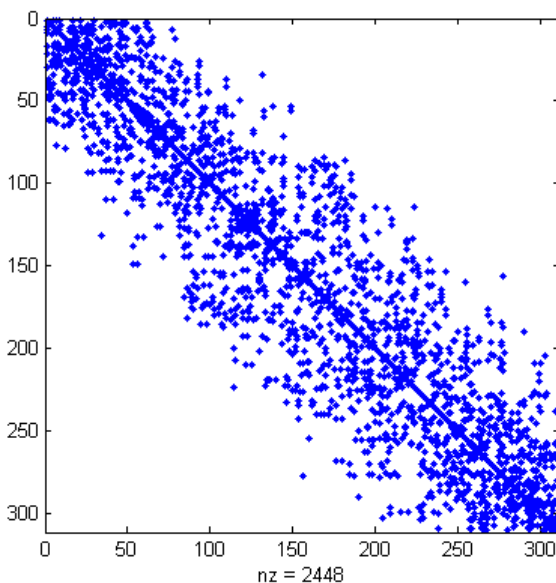
شکل (۵): یک ماتریس متقارن 10×10 با پهنای باند ۸

شکل (۳) فرم ایده آل یک ماتریس 10×10 با پهنای باند کمینه ۱ را نشان می‌دهد که حاصل اعمال بهترین جایگشت ممکن به ماتریس مسئله است. شکل‌های (۴) و (۵) نیز دو ماتریس 10×10 را نشان می‌دهند که حاصل اعمال دو جایگشت متفاوت دیگر به ماتریس مسئله هستند و پهنای باند هر دو یکسان و برابر با ۸ است. با توجه به مطالبی که ذکر شد، یک الگوریتم فراابتکاری هیچ تفاوتی بین دو جایگشتی که ماتریس‌های ارائه شده در شکل‌های (۴) و (۵) را تولید کرده‌اند، قائل نمی‌شود و شایستگی هر دو را یکسان در نظر می‌گیرد چراکه پهنای باند متناظر با آنها یکسان است.

با وجود این، شکی نیست که ماتریس شکل (۵) بسیار نزدیکتر به حالت ایده آل (ماتریس شکل (۱)) است. در واقع یک جایجایی ساده شامل جایجایی سطر ۱ و سطر ۱۰ و سپس جایجایی ستون ۱ و ستون ۱۰ یا بطور ساده‌تر، جایجایی ۱ و ۱۰ در جایگشت مربوطه، می‌تواند ماتریس شکل (۵) را به ماتریس شکل (۳) که حالت ایده آل است، تبدیل کند در حالیکه در مقایسه، تبدیل ماتریس شکل (۴) به ماتریس شکل (۳) بسیار دشوارتر است. چنین حالت‌هایی بطور مکرر در فرآیند



شکل (۶): گراف مرتبط با ماتریس HB/dwt_310

شکل (۷): کاهش پهنای باند dwt_310 با استفاده از $B(A)$ شکل (۸): کاهش پهنای باند dwt_310 با استفاده از $F(A)$

جدول (۱): نتایج آزمایش‌های عددی برای ماتریس dwt_310

	میانگین پهنای باند	بهترین پهنای باند
$B(A)$	۲۶۸/۲۰	۲۵۷
$F(A)$	۱۵۴/۰۳	۱۲۱

۶. با اعمال عملگرهای کراس اور^{۱۶} و موتاسیون^{۱۷} (با درصدهای معین) به کروموزوم‌های انتخاب شده، یک جمعیت جدید تولید کرده و سپس آن را جایگزین جمعیت قبلی کنید.

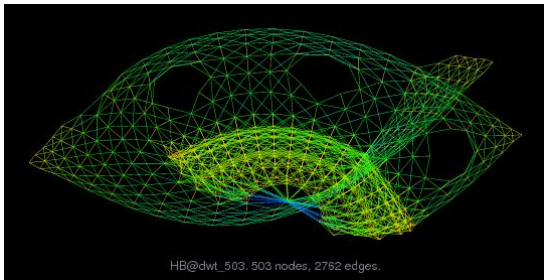
۷. بهترین کروموزوم در نسل آخر را به عنوان نتیجه نهایی اجرای الگوریتم، انتخاب کنید.

لازم به ذکر است که الگوریتم ژنتیک ارائه شده در این تحقیق که در پاراگراف قبلی توضیح داده شد، در واقع نسخه‌ای از الگوریتم ژنتیک استاندارد [۲۴] است که از کددهی جایگشتی [۲۵] و عملگرهای مرتبط با این نوع کددهی استفاده می‌کند.

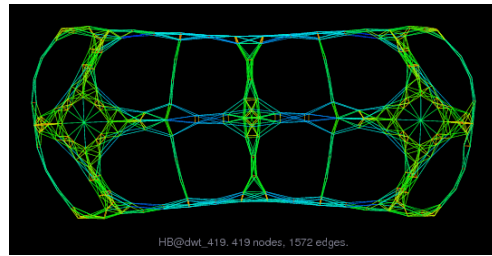
در آزمایش‌های انجام گرفته از سه نمونه ماتریس متقارن تنک استاندارد شامل HB/dwt_310 (۳۱۰×۳۱۰)، HB/dwt_419 (۴۱۹×۴۱۹) و HB/dwt_503 (۵۰۳×۵۰۳) [۲۶] استفاده شد. برای مقایسه عملکرد معیار پیشنهادی ($F(A)$) در برابر معیار پهنای باند ($B(A)$)، از آنها به عنوان تابع شایستگی در الگوریتم ژنتیک ارائه شده، استفاده شد. ۳۰ تکرار از الگوریتم ژنتیک پیشنهادی (با پارامترهای دقیقاً یکسان) به ازای هر نمونه ماتریس و برای هر یک از معیارها انجام شد و میزان پهنای باند برای هر تکرار از الگوریتم محاسبه شد. نتایج مرتبط با این آزمایش‌ها در شکل‌های ۱۴-۶ و جدول‌های ۳-۱ ارائه می‌شود.

برای هر یک از ماتریس‌های نمونه، ۳ شکل و یک جدول ارائه می‌شود. شکل اول، گراف مرتبط با ماتریس نمونه انتخابی را نشان می‌دهد. شکل دوم، الگوی ماتریس حاصل از اعمال بهترین جایگشت بدست آمده با استفاده از معیار پهنای باند را نشان می‌دهد. شکل سوم، الگوی ماتریس حاصل از اعمال بهترین جایگشت بدست آمده با استفاده از معیار پیشنهادی را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که در این شکل‌ها، nz بیانگر تعداد درایه‌های غیر صفر ماتریس (نقاط آبی رنگ) است. جدولی که بعد از این سه شکل می‌آید نیز بهترین پهنای باند و میانگین پهنای باند بدست آمده از ۳۰ تکرار الگوریتم را برای دو معیار تحت بررسی گزارش می‌کند.

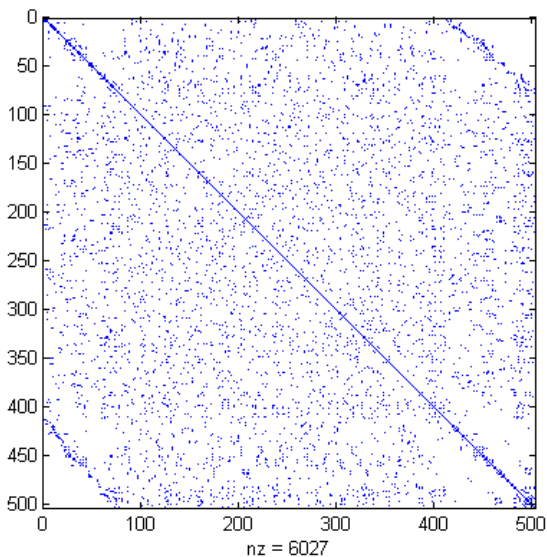
این نتایج به وضوح نشان می‌دهند که معیار پیشنهادی بطور بسیار قابل ملاحظه‌ای بهتر از معیار پهنای باند که در تحقیق‌های پیشین از آن استفاده شده است، عمل می‌کند. به عبارت دیگر، بهترین میزان پهنای باند بدست آمده با استفاده از معیار پیشنهادی برای HB/dwt_310 حدود ۵۲ درصد، برای HB/dwt_419 حدود ۴۱ درصد و برای HB/dwt_503 حدود ۳۳ درصد کمتر از پهنای باند بدست آمده توسط معیار رایج برای هر یک از این سه ماتریس است که کاهش بسیار قابل توجه است. شکل‌های دوم و سوم مرتبط با هر یک از این سه ماتریس نیز نشان می‌دهند که در نتیجه استفاده از معیار پیشنهادی، پهنای باند کاهش خیلی زیادی داشته و درایه‌های غیر صفر هر ماتریس به قطر اصلی آن ماتریس بسیار نزدیک تر شده‌اند.



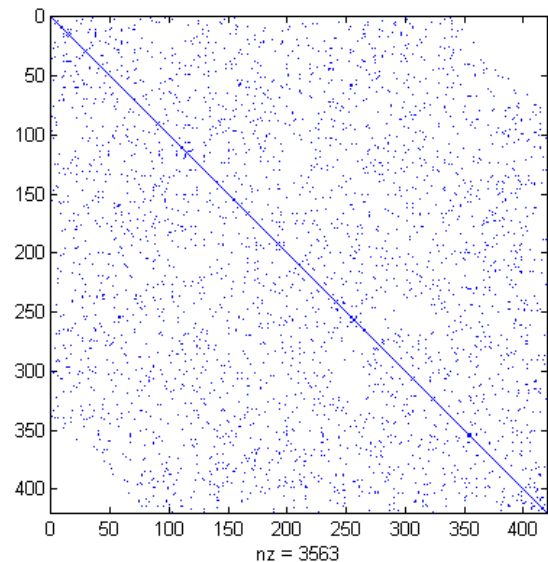
شکل (۱۲): گراف مرتبط با ماتریس HB/dwt_503



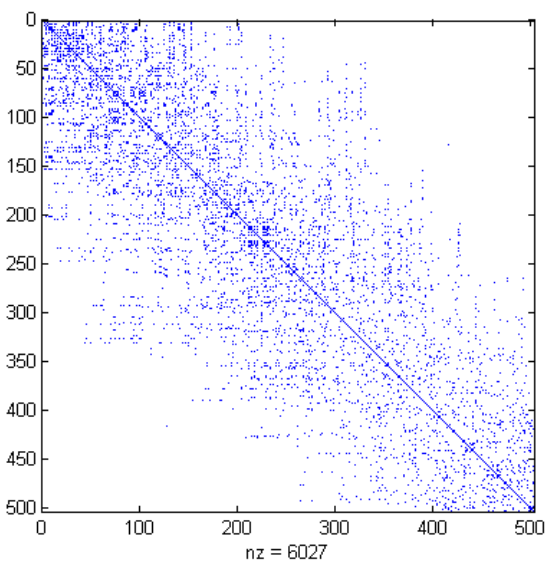
شکل (۹): گراف مرتبط با ماتریس HB/dwt_419



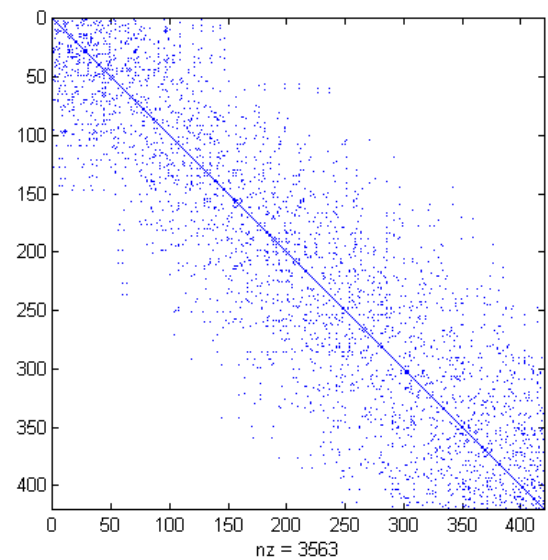
شکل (۱۳): کاهش پهنای باند dwt_503 با استفاده از $B(A)$



شکل (۱۰): کاهش پهنای باند dwt_419 با استفاده از $B(A)$



شکل (۱۴): کاهش پهنای باند dwt_503 با استفاده از $F(A)$



شکل (۱۱): کاهش پهنای باند dwt_419 با استفاده از $F(A)$

جدول (۳): نتایج آزمایش‌های عددی برای ماتریس dwt_503

	میانگین پهنای باند	بهترین پهنای باند
$B(A)$	۴۴۷/۲۶	۴۳۲
$F(A)$	۳۷۷/۱۰	۲۸۹

جدول (۲): نتایج آزمایش‌های عددی برای ماتریس dwt_419

	میانگین پهنای باند	بهترین پهنای باند
$B(A)$	۳۶۰/۸۰	۳۳۷
$F(A)$	۲۵۶/۲۰	۱۹۸

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، رویکرد جدیدی برای کاهش موثرتر پهنای باند ماتریس‌های متقارن تنک هنگام استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری ارائه شده است. کمینه کردن پهنای باند یک ماتریس مسئله‌ای ان پی-کامل است و طبیعتاً در رده مسائل بسیار دشوار قرار دارد. الگوریتم‌های زیادی برای حل این مسئله پیشنهاد شده‌اند که از میان آنها الگوریتم‌های فراابتکاری توانسته‌اند جوابهایی با کیفیتی بسیار بهتر در مقایسه با سایر الگوریتم‌ها تولید کنند و به همین دلیل از محبوبیت بیشتری برخوردار هستند.

در ساختار این الگوریتم‌ها یک تابع ارزیابی وجود دارد که وظیفه‌اش محاسبه میزان شایستگی جواب‌ها / راه‌حل‌های تولید شده در هر مرحله است. تقریباً در همه مطالعه‌های پیشین، تابع ارزیابی میزان پهنای باند ماتریس را بر می‌گرداند و در نتیجه این الگوریتم‌ها از این کمیت برای مقایسه کیفیت جواب‌های تولید شده استفاده می‌کنند. در این تحقیق نشان داده شده است که میزان پهنای باند معیار مناسبی برای این منظور نیست و استفاده از آن، فرآیند جستجو را به سمت جواب‌هایی با کیفیت بالا هدایت نمی‌کند.

برای برطرف کردن مشکل مذکور، در این تحقیق معیار جدیدی معرفی شده است تا به جای پهنای باند مورد استفاده قرار گیرد. ویژگی مهم معیار جدید در این است که تفاوت شایستگی بین راه‌حل‌های تولید شده توسط یک الگوریتم فراابتکاری را با دقت بالاتری آشکار می‌کند و در نتیجه الگوریتم را قادر می‌سازد تا انتخاب‌های آگاهانه‌تر و صحیح‌تری انجام دهد که نتیجه آن هدایت بهتر فرآیند جستجو و تولید جواب‌هایی با کیفیتی به مراتب بهتر است. برای ارزیابی کارایی رویکرد پیشنهادی، یک الگوریتم ژنتیک طراحی و معیار جدید و معیار پهنای باند در آن مورد استفاده قرار گرفتند. نتایج بدست آمده از آزمایش‌ها بر روی ماتریس‌های متقارن تنک استاندارد، برتری قابل توجه رویکرد پیشنهادی را تایید کردند.

مراجع

- [1] Pissanetsky, S., *Sparse Matrix Technology*, London: Academic Press, 1984.
- [2] Jennings, A., *Matrix Computation for Engineers and Scientists*, John Wiley, Hoboken, 1977.
- [3] Pardo, E.G., Martí, R. and Duarte, A., "Linear Layout Problems", *Handbook of Heuristics*, Springer, Cham, pp. 1025-1049, 2018.
- [4] Cuthill, E., McKee, J., "Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices", in *ACM National Conference*, New York: Association for Computing Machinery, pp. 157-172, 1969.
- [5] de Oliveira, S.L.G., Bernardes, J.A. and Chagas, G.O., "An evaluation of low-cost heuristics for matrix bandwidth and profile reductions", *Computational and Applied Mathematics*, Vol. 37, No. 2, pp. 1412-1471, 2018.
- [6] Rodrigues, T. N., Boeres, M. C. S., and Catabriga, L., "An Implementation of the Unordered Parallel RCM for Bandwidth Reduction of Large Sparse Matrices", *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 5, No. 1, 2017.
- [7] de Oliveira, S. L. G., de Abreu, A. A., Robaina, D. T., and Kischinhevsky, M., "Finding a starting vertex for the reverse Cuthill-McKee method for bandwidth reduction: a comparative analysis using asymmetric matrices", In *International Conference on Computational Science and Its Applications*, Springer, Cham, pp. 123-137, 2018.
- [8] Doss, L. J. T., and Arathi, P., "A constructive bandwidth reduction algorithm—A variant of GPS algorithm", *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, Vol. 13, No. 3, pp. 241-254, 2016.
- [9] de Oliveira, S. G., Abreu, A. A. M., Osthoff, C., and de Oliveira, L. H. G., "A Variant of the George-Liu Algorithm", In *International Conference on Computational Science and Its Applications*, Springer, Cham, pp. 3-12, 2019.
- [10] Marti, R., Laguna, M., Glover, F., and Campos, V., "Reducing the bandwidth of a sparse matrix with tabu search", *European Journal of operational Research*, Vol. 135, No. 2, pp. 450-459, 2001.
- [11] Lim, A., Rodrigues, B., and Xiao, F., "Integrated genetic algorithm with hill climbing for bandwidth minimization problem", in *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*, ser. LNCS, vol. 2724, E. Cant'u-Paz and et al., Eds. Springer, Heidelberg, pp. 1594-1595, 2003.
- [12] Pop, P., Matei, O., and Comes, C. A., "Reducing the bandwidth of a sparse matrix with a genetic algorithm", *Optimization*, Vol. 63, No. 12, pp. 1851-1876, 2014.
- [13] Lim, A., Lin, J., Rodrigues, B., and Xiao, F., "Ant colony optimization with hill climbing for the bandwidth minimization problem", *Applied Soft Computing*, Vol. 6, No. 2, pp. 180-188, 2006.
- [14] de Oliveira, S. G., and Silva, L. M., "Evolving reordering algorithms using an ant colony hyperheuristic approach for accelerating the convergence of the ICCG method", *Engineering with Computers*, pp. 1-17, 2019.
- [15] Lim, A., Lin, J., and Xiao, F., "Particle swarm optimization and hill climbing for the bandwidth minimization problem", *Applied Intelligence*, Vol. 26, No. 3, pp. 175-182, 2007.
- [16] Kaveh, A., and Bijari, S., "Bandwidth, profile and wavefront optimization using PSO, CBO, ECBO and TWO algorithms", *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, Vol. 41, No. 1, pp. 1-12, 2017.
- [17] Rodriguez-Tello, E., Jin-Kao, H., and Torres-Jimenez, J., "An improved simulated annealing algorithm for bandwidth minimization", *European Journal of Operational Research*, Vol. 185, No. 3, pp. 1319-1335, 2008.
- [18] Maftéiu-Scai L., Maftéiu E., and Maftéiu-Scai R., "Brain Storm Optimization Algorithms for Solving Equations Systems", In: Cheng S., Shi Y. (eds) *Brain Storm Optimization Algorithms, Adaptation, Learning, and Optimization*, Vol. 23, Springer, Cham, pp. 189-220, 2019.
- [19] Rodríguez-García, M. A., Duarte, A., and Sánchez-Oro, J., "GRASP with Path Relinking for 2D-Bandwidth Minimization Problem", In *Proceedings of the International Conference on Learning and Optimization Algorithms: Theory and Applications*, ACM, pp. 52, 2018.
- [20] Pop, P. C., and Matei, O., "An improved heuristic for the bandwidth minimization based on genetic programming",

- In International Conference on Hybrid Artificial Intelligence Systems, Springer, pp. 67-74, 2011.
- [21] DU, K.-L., and SWAMY, M. N. S., Search and optimization by metaheuristics: techniques and algorithms inspired by nature. Basel, Birkhäuser, 2016.
- [۲۲] مهران تقی پور گرجی کلایی، محسن فرشاد، سید محمد رضوی، "ارزیابی عملکرد الگوریتم‌های فراابتکاری در تخمین پارامترهای ساختاری موتور القایی قفسه سنجایی"، نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران، دوره ۱۴، شماره ۱، ۱۳۹۶.
- [۲۳] امیربهادر امیری، محسن قاینی، "بهبود روش شارژ سریع با استفاده از الگوریتم ژنتیک و ایجاد هماهنگی بین شارژرها در ایستگاه شارژ سریع خودروهای برقی به منظور استفاده بهینه از ظرفیت برق ایستگاه"، نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران، دوره ۱۶، شماره ۱، ۱۳۹۸.
- [24] Goldberg, D.E., Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning, Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing, 1989.
- [25] Michalewicz, Z., Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs, Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [26] Davis, T.A. and Hu, Y, "The University of Florida Sparse Matrix Collection", ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 38, No. 1, pp. 1-25, 2011.

زیرنویس‌ها

- ¹ Sparse
- ² Symmetric
- ³ Bandwidth
- ⁴ Direct techniques
- ⁵ NP-complete
- ⁶ Metaheuristic
- ⁷ Heuristic
- ⁸ Tabu search
- ⁹ Genetic algorithm
- ¹⁰ Ant colony optimization
- ¹¹ Particle swarm optimization
- ¹² Simulated annealing
- ¹³ Brain storm optimization
- ¹⁴ Greedy randomized adaptive search procedure
- ¹⁵ Genetic programming
- ¹⁶ Crossover
- ¹⁷ Mutation