تکمیل ماتریس گراف در حضور داده پرت

علیرضا احمدی[۱] سینا مجیدیان[۲] محمدحسین کهائی[۳]

۱- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه علم وصنعت ایران - تهران - ایران-
ar_ahmadi71@yahoo.com

۲- فارغ التحصیل دکتری- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه علم وصنعت ایران - تهران - ایران-
s_majidian@elec.iust.ac.ir

۳- دانشیار- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه علم وصنعت ایران - تهران – ایران
kahaei@iust.ac.ir

چکیده: در سال‌های اخیر موضوع تکمیل ماتریس بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. در مسأله‌ی تکمیل ماتریس، هدف بازیابی کامل یک ماتریس رتبه پایین است که با استفاده از مشاهده‌ی تعداد محدودی از درایه‌های آن ماتریس انجام می‌شود. همچنین، مدل‌سازی ارتباط بین سطرهای ماتریس به صورت یک گراف موجب معرفی زمینه پژوهشی تکمیل ماتریس گراف شده است. در مسأله‌ی تکمیل ماتریس گراف، بازیابی ماتریس با استفاده از داده های مشاهده شده از طریق افزودن عبارت تغییرات کل گراف به تابع هدف مسأله‌ی تکمیل ماتریس انجام می‌پذیرد. اما در عمل داده‌ها، آغشته به نویز و شامل داده‌های پرت می باشند. به داده‌هایی که با سایر داده‌های مشاهده شده متفاوت باشند و از ساختار کلی آن‌ها پیروی نکنند، داده‌ی پرت گفته می‌شود. در این مقاله، روشی جدید برای تکمیل ماتریس گراف در شرایط وجود همزمان نویز و داده‌ی پرت در مشاهدات ارائه شده است. روش پیشنهادی با نام GMCO-DL از ماتریس لاپلاسین جهت‌دار برای تعریف تغییرات کل گراف استفاده می‌نماید. نتایج شبیه‌سازی روش پیشنهادی حاکی از بهبود قابل ملاحظه ای از نظر خطا می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: **تکمیل ماتریس، پردازش سیگنال گراف،گراف جهتدار، داده پرت**

نوع مقاله: پژوهشی

DOI: 10.52547/jiaeee.20.1.89

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۲۳

تاریخ پذیرش مشروط مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۲۷

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۷/۲۷

نام نویسنده‌ی مسئول: دکتر محمد حسین کهائی

نشانی نویسنده‌ی مسئول: ایران- تهران- دانشگاه علم وصنعت ایران- دانشکده مهندسی برق

۱- مقدمه

۱-۱- معرفی تکمیل ماتریس

پس از افزایش توجه پژوهشگران به موضوع تحقیقاتی حسگری فشرده، تعمیم آن به ابعاد بالاتر مورد بررسی قرار گرفت [۱]. این امر موجب معرفی مبحث بازیابی ماتریس یا به بیان دیگر مسأله‌ی تکمیل ماتریس شده است. تکمیل ماتریس به دنبال کامل نمودن یک ماتریس رتبه‌پایین[۱] از روی مشاهده‌ی تعداد محدودی از درایه‌های آن ماتریس می‌باشد [۲-۶]. در واقع تنک بودن ماتریس، معادل با تنک بودن بردار مقادیرتکین[۲] ماتریس تعریف می‌شود. فرض رتبه پایین بودن ماتریس، شرط اصلی برای تکمیل ماتریس می‌باشد. در حالت کلی، بازیابی ماتریس بوسیله‌ی مشاهده‌ی برخی از درایه‌های آن امکان‌پذیر نمی‌باشد و اعمال شرط رتبه‌پایین بودن موجب کاهش تعداد جواب‌های ممکن می‌شود. اما شرط رتبه پایین بودن نیز شرط کافی برای یافتن پاسخ مسأله‌ی تکمیل ماتریس نمی‌باشد. برای تضمین بازیابی ماتریس از روی مشاهده‌ی تعداد محدودی از درایه‌های آن از معیار همدوسی استفاده می‌شود. به کمک معیار همدوسی ماتریس می‌توان کران پایین حداقل تعداد درایه مورد نیاز جهت بازیابی ماتریس را به دست آورد [۶].

ماتریس‌های رتبه‌پایین نقش مهمی در مسائل مربوط به پردازش سیگنال ایفا می‌کنند. در بسیاری از زمینه های تحقیقاتی همچون تخمین هاپلوتایپ [۲-۳و۷-۸]، تخمین جهت منابع [۴و۱۴]، یادگیری ماشین[۳] [۱۵] و برش‌نگاری حالت کوانتوم[۴] [۱۶]، با این دسته از ماتریس ها مواجه هستیم. به بیان دیگر بسیاری از داده‌های موجود در جهان واقعی از مدل ماتریس‌های رتبه پایین تبعیت می کنند.

یکی از مسائل معروف تکمیل ماتریس، سیستم پیشنهادکننده‌ی سایت اجاره فیلم نِت‌فلیکس است. در این مسأله، کاربران مختلف به عنوان سطرها و فیلم‌ها به عنوان ستون‌های ماتریس $\mathbf{X}$ در نظر گرفته می‌شوند. ماتریس $\mathbf{X} \in R^{N\times L}$ در حالت کلی یک ماتریس مستطیلی است. درایه‌های آن نشان‌دهنده‌ی نحوه‌ی نمره‌دهی کاربران مختلف به فیلم‌های گوناگون می‌باشند. به عنوان مثال درایه‌ی x_{ij} بیانگر نمره‌ای است که کاربر i اُم به فیلم j اُم اختصاص داده است. هدف این است با استفاده از تکمیل ماتریس و نحوه‌ی نمره‌دهی کاربران به فیلم‌هایی که قبلا مشاهده نموده‌اند، میزان نمره‌دهی آن‌ها به فیلم‌هایی که مشاهده نکرده‌اند را پیش‌بینی نماییم. در واقع قصد داریم، با فرض دانستن تعداد کمی از درایه ها، ماتریس را به صورت کامل بازیابی نماییم [۱۱-۱۳ و ۱۷].

مثال دیگر برای سیستم پیشنهادکننده مسأله‌ی تخمین دمای پایگاه‌های هواشناسی می‌باشد. هدف این مسأله تخمین دمای پایگاه‌های هواشناسی در طول سال، با دانستن دمای پایگاه‌های هواشناسی در برخی از ایام سال می‌باشد. دمای پایگاه‌های هواشناسی به عنوان سطرهای ماتریس و روزهای مختلف سال به عنوان ستون‌های ماتریس در نظر گرفته می‌شوند. به عبارت دیگر درایه‌ی x_{ij} ، دمایی است که پایگاه i ام در روز j ام ثبت کرده است. در این مسأله بازیابی ماتریس با استفاده از در نظر گرفتن فاصله‌ی جغرافیایی بین پایگاه‌های مختلف انجام می‌پذیرد [۹-۱۰].

۱-۲- تکمیل ماتریس با مشاهدات آغشته به داده پرت

وجود داده‌ی پَرت[۵] در بسیاری از زمینه‌های تحقیقاتی گزارش شده است [۷-۹، ۲۳-۲۶]. در اصطلاح به داده‌هایی که با سایر داده‌های مشاهده شده متفاوت باشند و از ساختار کلی آن‌ها پیروی نکنند داده‌ی پرت گفته می‌شود. در مسأله‌ی تکمیل ماتریس نیز امکان وجود داده‌ی پرت در مشاهدات وجود دارد. به عنوان مثال در مسأله‌ی نِت‌فلیکس، کاربر می‌تواند به صورت سهوی یا عمدی نمره‌ی اشتباهی به یک فیلم اختصاص دهد. به عبارت دیگر وجود داده‌ی پرت می‌تواند ویژگی رتبه‌پایین بودن ماتریس را با مشکل روبه‌رو سازد. در صورت وجود داده‌ی پرت در مجموعه مشاهدات، بازیابی صحیح ماتریس از روی مشاهده‌ی تعداد محدودی از درایه‌های آن امکان‌پذیر نمی‌باشد. معرفی روشی که علاوه بر بازیابی ماتریس از میان مشاهدات ناقصِ آغشته شده به نویز، توانایی شناسایی داده‌ی پرت را داشته باشد، عملکرد تکمیل ماتریس را بهبود می‌بخشد.

۱-۳- پردازش سیگنال گراف

پردازش داده‌های حجیم و کاربرد آن در بسیاری از زمینه های‌مختلف علمی و مهندسی موجب ایجاد چالش‌های جدیدی در حوزه‌ی پردازش سیگنال های گسسته در زمان شده است. محاسبات زیاد و پیچیده‌ی روش‌های پردازش سیگنال کلاسیک موجب شده است تا اینگونه روش‌ها کارایی خود را برای داده‌های با ابعاد بالا از دست بدهند. بدین منظور شناسایی روش‌هایی که منجربه‌کاهش محاسبات ناشی از ابعاد بالای داده‌ها شود در دستور کار محققین این حوزه قرار گرفته است. این امر موجب معرفی زمینه‌ی تحقیقاتی پردازش سیگنال گسسته به روی گراف یا DSP_G شده است. DSP_G از ادغام مفاهیم تئوری گراف و تحلیل های محاسباتی پردازش سیگنال بوجود آمده است. در این مبحث ارتباط بین نمونه‌های سیگنال گسسته، به صورت گراف مدل‌سازی می‌شود. تعمیم مفاهیم پردازش سیگنال گسسته در زمان

برای سیگنال‌هایی با ساختار پیچیده، از فواید $\mathrm{DSP_G}$ محسوب می‌شود [۱۲ و ۱۹-۲۰]. بدین منظور شناسایی روش‌هایی که منجربه‌کاهش محاسبات ناشی از ابعاد بالای داده‌ها شود در دستور کار محققین این حوزه قرار گرفته است. این امر موجب معرفی زمینه‌ی تحقیقاتی پردازش سیگنال گسسته به روی گراف یا $\mathrm{DSP_G}$ شده است. $\mathrm{DSP_G}$ از ادغام مفاهیم تئوری گراف و تحلیل های محاسباتی پردازش سیگنال بوجود آمده است. در این مبحث ارتباط بین نمونه‌های سیگنال گسسته به صورت گراف مدل‌سازی می‌شود. تعمیم مفاهیم پردازش سیگنال گسسته در زمان برای سیگنال‌هایی با ساختار پیچیده، از فواید $\mathrm{DSP_G}$ محسوب می‌شود [۲۱].

۱-۴- معرفی سیگنال گراف

گراف یک مدلی ریاضی برای نمایش ارتباط بین اعضای یک مجموعه می‌باشد. برای نمایش گراف از مجموعه رئوس و یال‌هایی که رئوس مختلف را به هم متصل می‌کنند، استفاده می‌شود. نظریه‌ی گراف یکی از موضوعات مهم در ریاضیات گسسته است که به مطالعه‌ی گراف‌ها و مدل‌سازی مسائل تحقیقاتی به وسیله‌ی ساختارهای گراف می پردازد. لئونارد اویلر در سال ۱۷۳۶ میلادی و با حل مسئله‌ی پل‌های کونیسبرگ، اقدام به معرفی نظریه‌ی‌گراف نمود و واژه‌ی گراف برای اولین بار در سال ۱۸۷۸ میلادی توسط جوزف سیلوستر برای این مدل ریاضی استفاده شد. نظریه‌ی گراف به بررسی مفاهیم پایه گراف مانند درجه، مسیر، قدم، درخت، گراف‌های کامل، زیرگراف و بسیاری از مسائل دیگر می‌پردازد. روش‌های مختلفی برای بیان ریاضی ساختار گراف وجود دارد. استفاده از ماتریس مجاورت[۶] گراف یکی از پرکاربردترین این روش‌ها می‌باشد. گراف را می‌توان به صورت $\mathrm{G}=(V,\mathbf{A})$ نمایش داد که در آن مجموعه‌ی $V=\{\mathrm{v}_0,\mathrm{v}_2,\dots,\mathrm{v}_{\mathrm{N}-1}\}$ یک مجموعه‌ی N عضوی نشان دهنده‌ی رئوس گراف و ماتریس $\mathbf{A}$ بیانگر ماتریس مجاورت گراف می‌باشد. درایه‌های ماتریس مجاورت را به صورت a_{nm} نشان می‌دهیم. در ابتدا و برای سادگی، ماتریس مجاورت را باینری در نظر می‌گیریم. وجود یا عدم وجود یال بین رئوس مختلف گراف توسط درایه‌های ماتریس مجاورت بیان می‌شود. درایه‌ی a_{nm} بیانگر وجود یک یال از رأس v_m به رأس v_n است؛ در واقع اگر مقدار a_{nm} برابر ۱ باشد، یک یال از رأس v_m به رأس v_n وجود دارد. به طور مشابه $a_{nm}=0$ بیانگر عدم وجود یال از رأس v_m به رأس v_n می‌باشد. همچنین می‌توان از ماتریس مجاورت وزن‌دار برای بیان ارتباط دقیق‌تر میان رئوس گراف استفاده نمود. درایه‌های ماتریس مجاورت وزن‌دار مقادیر مختلف حقیقی و یا مختلط را اختیار می‌کنند [۱۹].

سیگنال گراف را می‌توان به صورت نگاشتی از مجموعه‌ی رئوس V به مجموعه اعداد حقیقی R و یا در حالت کلی مختلط درنظر گرفت و به صورت زیر تعریف نمود:

$$\mathbf{s}: \begin{array}{l} V \to \mathrm{R}, \\ v_n \to s_n \end{array} \qquad (۱)$$

در واقع به هر رأس v_i یک مقدار حقیقی (یا مختلط) s_i اختصاص داده شده است. به بیان دیگر سیگنال گراف $\mathbf{s}$ تحت یک گراف مشخص را به صورت بردار نمایش می‌دهند:

$$\mathbf{s}=[\mathrm{s}_0 \;\; \mathrm{s}_1 \;\; \dots \;\; \mathrm{s}_{\mathrm{N}-1}]^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}} \qquad (۲)$$

که در آن مقدار N برابر با تعداد رئوس گراف می‌باشد [۱۰].

۲- مدل مساله

۲-۱- تکمیل ماتریس با استفاده از نرم هسته‌ای

برای توصیف مسأله تکمیل ماتریس نیازمند به تعریف اپراتور مشاهدات هستیم. مجموعه‌ی M به عنوان زیر مجموعه‌ای از اندیس‌های درایه‌های ماتریس $\mathbf{X}\in\mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۵]:

$$\mathrm{M}\subseteq\{1,2,\dots.,N\}\times\{1,2,\dots.,L\} \qquad (۳)$$

در این صورت اپراتور مشاهدات $P:\mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}\to\mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$[P(\mathbf{X})]_{\mathrm{ij}}=\begin{cases}\mathbf{X}_{\mathrm{ij}} & (\mathrm{i},\mathrm{j})\in\mathrm{M}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \qquad (۴)$$

فرض می‌شود $\mathbf{T}\in\mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ ماتریس رتبه پایینی باشد که قصد بازیابی آن را داشته باشیم. مسأله تکمیل ماتریس به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{aligned}&\underset{\mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad \mathrm{rank}(\mathbf{X})\\ &\text{subject to} \quad \mathrm{P}(\mathbf{X})=\mathrm{P}(\mathbf{T})\end{aligned} \qquad (۵)$$

مسأله فوق به دلیل وجود عبارت رتبه‌ی ماتریس در تابع هدف نامحدب است. همچنین این مسأله به عنوان یک مسأله‌ی دشوار۷ شناخته می‌شود. برای حل این مشکل از عبارت نرم هسته‌ای۸ به عنوان جایگزین محدب رتبه‌ی ماتریس استفاده می‌شود. بدین ترتیب مسأله‌ی غیرمحدب به یک مسأله‌ی بهینه‌سازی محدب تبدیل می‌گردد [۱۲].

$$\begin{aligned}&\underset{\mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad \|\mathbf{X}\|_*\\ &\text{subject to} \quad \mathrm{P}(\mathbf{X})=\mathrm{P}(\mathbf{T})\end{aligned} \qquad (۶)$$

کـه در آن $\|.\|_*$ نمـاد نـرم هسـته‌ای مـاتریس اسـت و بـه صـورت حاصل‌جمع مقادیر تکین یک ماتریس تعریف می‌شـود. تحـت شـرایط مناسب مسأله کمینه‌سازی رتبه و مسأله محدب آن، معـادل هسـتند و دارای پاسخ یکتا می‌باشند. در بحث فوق، مسـأله تکمیـل مـاتریس در حالت عدم وجود نویز بررسی شد. هنگام مشاهده‌ی نویزی درایه‌هـای $\mathbf{T}$، مسأله‌ی تکمیل ماتریس به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad & \|\mathbf{X}\|_* \\ \text{subject to} \quad & \|\mathrm{P}(\mathbf{X}) - \mathrm{P}(\mathbf{T})\|_{\mathrm{F}} \le \varepsilon \end{aligned} \tag{۷}$$

پارامتر ε وظیفه‌ی کنترل مقدار نویز مجاز در درایه‌ها را بر عهـده دارد. همچنین، $\|.\|_{\mathrm{F}}$ بیانگر نرم فربینیوس بوده و مقدار آن برابر بـا ریشـه‌ی دوم حاصل جمع مجذور درایه های ماتریس می‌باشد. در ادامه بررسـی مساله تکمیل ماتریس با استفاده از مفاهیم گراف می پردازیم.

۲-۲- تکمیل ماتریس گراف

هر سیگنال گراف مدل‌سازی شده توسط گراف $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathbf{A})$ ، به صورت یک بردار درنظر گرفته مـی‌شـود، $\mathbf{x}^{(l)} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}}$هـا سـتون‌هـای مـاتریس $\mathbf{X} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ هستند و به عنوان سیگنال گراف درنظر گرفتـه مـی‌شـود. همه‌ی $\mathbf{x}^{(l)}$ها از ساختار یکسان گرافی $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathbf{A})$ تبعیت می‌کنند. به عبارت دیگر ارتباط بین تمام درایه‌های $\mathbf{x}^{(l)}$ها توسط یک ساختار گرافِ مشخص، مدل‌سازی می‌شود.

یکی از مشکلاتی که در روش های ارائه شـده بـرای مسـأله‌ی تکمیـل ماتریس با آن رو به رو هستیم، عدم درنظرگرفتن ارتباطِ موجـود بـین درایه‌هـای سـطرها و یـا سـتون‌هـای مـاتریس اسـت. در حالـت کلـی درنظرگرفتن چنین ارتباطی بین درایه‌های ماتریس، بهبود در عملکـرد بازسازی آن ماتریس را بـه دنبـال خواهـد داشـت. بـا در نظـر گـرفتن مـاتریس $\mathbf{T} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ بـه عنـوان مـاتریس داده‌هـا ، مسـأله‌ی تکمیـل ماتریس گراف در حالت بدون نویز به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۶]:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad & \mathrm{S}_2(\mathbf{X}) + \beta\|\mathbf{X}\|_* \\ \text{subject to} \quad & \mathrm{P}(\mathbf{X}) = \mathrm{P}(\mathbf{T}) \end{aligned} \tag{۸}$$

که $\mathrm{S}_2(\mathbf{X})$ برابر با $\mathrm{S}_2(\mathbf{X}) = \sum_{l=1}^{\mathrm{L}} \mathrm{S}_2(\mathbf{x}^{(l)}) = \|\mathbf{X} - \mathbf{A}^{\mathbf{norm}}\mathbf{X}\|_{\mathrm{F}}^2$ نـرم تغییرات کل گراف است.

همچنین، $\mathbf{A}^{\mathbf{norm}}$ ماتریس مجاورت نرمالیزه گـراف $\mathbf{A}^{\mathbf{norm}} = \frac{1}{|\lambda_{\max}|}\mathbf{A}$ است. افزودن عبارت نرم تغییرات کـل گـراف موجـب بهبـود عملکـرد مسأله‌ی تکمیل ماتریس می‌شـود. کمینـه‌سـازی ایـن عبـارت موجـب می‌شود، مقدار سیگنال در هر رأس گراف یا همان درایه‌های ستون‌های ماتریس $\mathbf{X}$ ، به صـورت ترکیـب خطـی از مقـادیر سـیگنال در رئـوس مجموعه همسایگی آن رأس بازیابی شود. در واقع اضافه شـدن عبـارت نرم تغییرات کل موجب می‌شود تا سیگنال گراف متناظر با ستون‌هـای ماتریس بازیابی شده‌ی $\mathbf{X}$ هموار باشند. بـه عبـارت دیگـر سـتون‌هـای ماتریس $\mathbf{X}$ در زیر فضای فرکانس‌های کم گراف قرار دارند. عدد اسـکالر β نیز میزان تاثیرگذاری دو عبارت تابع هدف در بازیـابی $\mathbf{X}$ را کنتـرل می‌نماید. در واقع هماننـد روش SVT [۸]، هـر چـه β بزرگتـر باشـد، تاثیرگذاری نرم هسته ای نسبت به نرم تغییرات کل افزایش می‌یابد.

مسأله ذکر شده با کمینه‌سازی مجموعِ نرم تغییرات کل و نرم هسته‌ای متغیر $\mathbf{X}$ ، ماتریس$\mathbf{T}$ را بازیابی می‌نماید. ماتریس بازیابی شده ماتریسی رتبه‌پایین و با ستون‌های هموار خواهد بود. می‌توان به جای استفاده از اپراتور مشاهدات $P : \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ از ماتریس مشاهدات ناقص برای بیان ساده‌تر مسأله اسـتفاده نمـود. مـاتریس مشـاهدات نـاقص، بـرای مجموعه‌ی مشاهدات $\mathrm{M} \subseteq \{1,2,\dots.,\mathrm{N}\} \times \{1,2,\dots.,\mathrm{L}\}$ ، بـه صـورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mathbf{T}_{\mathrm{M}})_{\mathrm{ij}} = \begin{cases} (\mathbf{T})_{\mathrm{ij}} & (\mathrm{i},\mathrm{j}) \in \mathrm{M} \\ \mathbf{0} & \mathrm{o.w} \end{cases} \tag{۹}$$

در ایـن صـورت مسـأله‌ی رابطـه‌ی (۸) بـه صـورت زیـر بازنویسـی و GMCM[۹] نامیده می‌شود [۱۸]:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad & \mathrm{S}_2(\mathbf{X}) + \beta\|\mathbf{X}\|_* \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{X}_{\mathrm{M}} = \mathbf{T}_{\mathrm{M}} \end{aligned} \tag{۱۰}$$

در حالتی که داده با نویز آغشته شده باشند، $\mathbf{T}_{\mathrm{M}}$ به صورت زیر تعریـف می‌گردد:

$$\mathbf{T}_{\mathrm{M}} = \mathbf{X}_{\mathrm{M}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{M}} = (\mathbf{X} + \mathbf{Z})_{\mathrm{M}} \tag{۱۱}$$

ماتریس $\mathbf{Z} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ ماتریس نویز می‌باشد. بدین ترتیب، مسأله تکمیـل ماتریس گراف در حالت وجود نویز در مشاهدات، به صورت زیر تعریـف می‌گردد:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad & \mathrm{S}_2(\mathbf{X}) + \beta\|\mathbf{X}\|_* \\ \text{subject to} \quad & \|(\mathbf{X} - \mathbf{T})_{\mathrm{M}}\|_{\mathbf{F}}^2 \le \varepsilon^2 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

که پارامتر ε مقدار خطای مجاز برای درایه‌های مشاهده شده را کنترل می‌نماید. مسأله‌ی بهینه‌سازی مقید فوق را مـی‌تـوان بـه یـک مسـأله بهینه‌سازی غیرمقید تبدیل نمود. برای این کار از روش تنظیم‌پارامترها استفاده می‌شود. مساله بهینه‌سـازی بـه دسـت آمـده روش GMCR[۱۰] نامگذاری شده است [۹]:

$$\underset{\mathbf{X}}{\text{minimize}} \quad \|(\mathbf{X}-\mathbf{T})_{\mathrm{M}}\|_{\mathrm{F}}^2 + \alpha S_2(\mathbf{X}) + \beta\|\mathbf{X}\|_* \qquad (۱۳)$$

در این روش از پارامترهای تنظیم α و β استفاده شده است.

۳- روش پیشنهادی برای تکمیل ماتریس گراف درحضور داده پرت (GMCO-DL)

در این بخش حالت وجود نویز و داده‌ی پرت را در درایه‌های مشاهده‌ی شده در نظر می‌گیریم. ابتدا مسأله را برای مشاهدات نویزی معرفی می‌کنیم. از مدل نویز سفید گوسی جمع‌شونده (AWGN[11]) برای آغشته کردن مشاهدات به نویز استفاده می‌کنیم. برای در نظر گرفتن نویز، ماتریس مشاهدات ناقص را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{T}_{\mathrm{M}} = \mathbf{X}_{\mathrm{M}} + \boldsymbol{Z} = \mathbf{X}_{\mathrm{M}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{M}} \qquad (۱۴)$$

در رابطه‌ی فوق $\mathbf{Z} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ ماتریس نویز و $\mathbf{Z}_{\mathrm{M}} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ ماتریس مشاهدات ناقص نویز می‌باشند. به دلیل اینکه تنها به درایه‌هایی که مشاهده می‌شوند می‌توان نویز اضافه نمود، لذا ماتریس های $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{Z}_{\mathrm{M}}$ معادل یکدیگر هستند. مسأله تکمیل ماتریس در حالت وجود نویز در درایه‌های مشاهده شده در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{X},\mathbf{Z}}{\text{minimize}} \quad & \|\mathbf{L}_{\mathrm{di}}\mathbf{X}\|_{\mathrm{F}}^2 + \beta\|\mathbf{X}\|_* \\ \text{subject to} \quad & \|\mathbf{Z}\|_{\mathrm{F}}^2 \le \varepsilon^2 \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

که در آن $\mathbf{L}_{\mathrm{di}}$ ماتریس لاپلاسین جهت‌دارِ گراف است که به صورت $\mathbf{L}_{\mathrm{di}} = \mathbf{D}_{\mathrm{in}} - \mathbf{A}$ تعریف می شود و $\mathbf{D}_{\mathrm{in}}$ ماتریس درجه‌ی ورودی رئوس گراف است [۲۰].

ماتریس مشاهدات ناقص با وجود داده‌ی پرت به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$\mathbf{T}_{\mathrm{M}} = \mathbf{X}_{\mathrm{M}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{M}} + \mathbf{W} = \mathbf{X}_{\mathrm{M}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{M}} + \mathbf{W}_{\mathrm{M}} \qquad (۱۶)$$

که $\mathbf{W} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ ماتریس داده‌ی پرت و $\mathbf{W}_{\mathrm{M}} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ ماتریس مشاهدات ناقص داده‌ی پرت می‌باشند. ماتریس های $\mathbf{W}$ و $\mathbf{W}_{\mathrm{M}}$ معادل یکدیگرند؛ زیرا وجود داده‌ی پرت را می‌توان تنها در داده‌های مشاهده شده در نظر گرفت. ساختار ماتریس داده‌ی پرت را به صورت تنک در نظر می‌گیریم. به این معنا که اکثر درایه‌های $\mathbf{W} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ مقدار صفر را اختیار می‌کنند. مسأله‌ی تکمیل ماتریس در حضور نویز و داده‌ی پرت را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{X},\mathbf{W},\mathbf{Z}}{\text{minimize}} \quad & \alpha\|\mathbf{L}_{\mathrm{di}}\mathbf{X}\|_{\mathrm{F}}^2 + \beta\|\mathbf{X}\|_* + \gamma\|\mathbf{W}\|_0 \\ \text{subject to} \quad & \|\mathbf{Z}_{\mathrm{M}}\|_{\mathrm{F}}^2 \le \varepsilon^2 \\ & \mathbf{T}_{\mathrm{M}} = (\mathbf{X}+\mathbf{Z}+\mathbf{W})_{\mathrm{M}} \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

در رابطه‌ی فوق، $\|.\|_0$ بیانگر نرم l_0 است و مقدار آن با تعداد درایه‌های غیر صفر ماتریس برابر می‌شود. نرم l_0 محدب نمی‌باشد و برای تعریف مسأله‌ی بهینه‌سازی محدب از نرم l_1 استفاده می‌کنیم. دلیل استفاده از نرم l_0 آگاهی از صفر بودن تعداد زیادی از درایه‌های ماتریس داده‌ی پرت می‌باشد. بدین ترتیب روش پیشنهادی GMCO-DL با حل مساله بهینه‌سازی زیر انجام می‌پذیرد.

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{X},\mathbf{W},\mathbf{Z}}{\text{minimize}} \quad & \alpha\|\mathbf{L}_{\mathrm{di}}\mathbf{X}\|_{\mathrm{F}}^2 + \beta\|\mathbf{X}\|_* + \gamma\|\mathbf{W}\|_1 \\ \text{subject to} \quad & \|\mathbf{Z}_{\mathrm{M}}\|_{\mathrm{F}}^2 \le \varepsilon^2 \\ & \mathbf{T}_{\mathrm{M}} = (\mathbf{X}+\mathbf{Z}+\mathbf{W})_{\mathrm{M}} \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که در آن $\|.\|_1$ نرم l_1 است و برای ماتریس $\mathbf{W} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

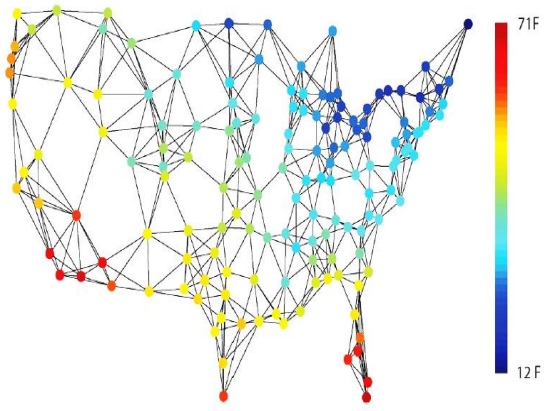
$$\|\mathbf{W}\|_1 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{L}} \mathrm{w}_{\mathrm{ij}} \qquad (۱۹)$$

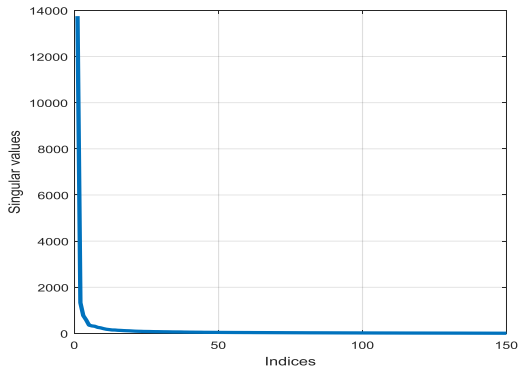
۴- نتایج شبیه‌سازی

داده‌ی مورد استفاده در این مقاله مربوط به دمای ۱۵۰ پایگاه هواشناسی ایالات متحده در طول یک سال می‌باشد که برای بررسی عملکرد روش GMCR استفاده شده است [۱۰و۱۷]. برای تولید داده، ماتریس دمای پایگاه‌ها را با $\mathbf{T} \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{L}}$ نمایش می‌دهیم. هر سطر ماتریس متناظر یک پایگاه هواشناسی و همچنین هر ستون ماتریس نماینده یک روز از سال می‌باشد. بنابراین برای ابعاد ماتریس $\mathbf{T}$ مقادیر N =۱۵۰ و L =۳۶۵ حاصل می‌شود. برای دستیابی به ساختار گراف مسأله از فاصله‌ی جغرافیایی پایگاه‌ها نسبت به هم استفاده شده است. هر رأس گراف به یک پایگاه اختصاص داده شده است و هر رأس به ۸ رأس دیگری که پایگاه‌های متناظر با آن‌ها از نظر فاصله‌ی جغرافیایی فاصله‌ی کمتری دارند، وصل شده است. به عبارت دیگر هر رأس توسط ۸ یال جهت‌دار به سایر رئوس وصل شده است؛ بنابراین ماتریس مجاورت گراف، جهت‌دار می‌باشد. به طور شهودی می‌توان گفت که مناطقی که از نظر جغرافیایی به هم نزدیکتر هستند دمای مشابهی دارند. ساختار گراف حاکم بر داده‌های در نظر گرفته شده به صورت شکل ۱ نمایش داده می شود. این شکل نشان‌دهنده‌ی سیگنال گراف

دمای پایگاه‌های هواشناسی در یک روز می‌باشد. سیگنال‌های گراف شکل ۱ (بالا) را به صورت $\mathbf{t}^{(I)} \in \mathbf{R}^{N}$ و به عنوان ستون ماتریس $\mathbf{T}$ در نظر گرفته می‌شود. هر $\mathbf{t}^{(I)}$ بیانگر دمای پایگاه‌های مختلف در یک روز مشخص می‌باشد. در شکل ۱ (پایین) نمودار مقادیر تکین ماتریس داده $\mathbf{T}$ رسم شده است. از آنجایی که ستون‌های ماتریس داده‌ی $\mathbf{T}$، سیگنال‌های گراف هستند و همگی از ساختار گراف نشان‌داده شده در شکل ۱ تبعیت می‌کنند، نتیجه می‌شود که ماتریس داده تقریبا رتبه‌پایین است؛ پنج مقدار تکین ماتریس نسبت به بقیه آن‌ها، مقادیر بزرگتری را اختیار نموده‌است.

شبیه‌سازی‌ها با استفاده از نرم افزار MATLAB و بسته نرم افزاری CVX به منظور حل مسائل پیچیده‌ی بهینه‌سازی محدب استفاده شده است. در این بخش میزان خطای بازیابی ماتریس را بر حسب درصد درایه‌های مشاهده شده رسم می‌نماییم. به عنوان مثال فرض‌کنید که درصد مشاهدات درایه‌ها برابر ۲۰٪ باشد. در این صورت، در هر مرحله از اجرای روش‌های تکمیل ماتریس، ۲۰٪ از درایه‌ها را به صورت تصادفی انتخاب می‌شود. سپس، ماتریس مشاهدات ناقص با استفاده از رابطه‌ی (۹) تشکیل داده می‌شود. در شبیه‌سازی‌ها از مشاهدات یکنواخت استفاده شده است. به عبارت دیگر فرض شده است که از هر سطر و ستون حداقل یک درایه مشاهده شده است و احتمال انتخاب سایر درایه‌ها یکسان است. سپس، با استفاده از درایه‌های مشاهده‌شده آغشته شده به نویز و داده‌ی پرت، روش پیشنهادی GMCO-DL برای بازیابی سایر درایه‌های ماتریس استفاده شده است.





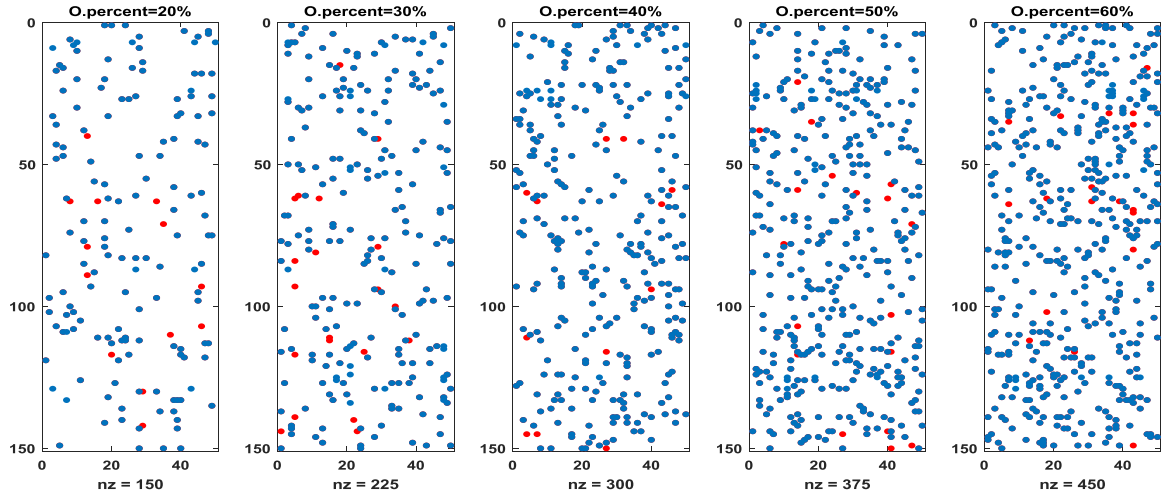
شکل (۱): (بالا) ساختار گراف پایگاه‌های هواشناسی ایالات متحده [۱۹] (پایین) نمودار مقادیر تکین ماتریس داده $\mathbf{T}$

برای هر درصد مشاهدات مشخص ۱۰ بار این مرحله را تکرار می کنیم. همچنین، در هر مرحله دمای ۵۰ روز از روز های سال را به صورت تصادفی انتخاب کرده و به عنوان ستون‌های $\mathbf{T}$ در نظر می‌گیریم. در واقع برای ابعاد ماتریس مقادیر $N = ۱۵۰$ و $L = ۵۰$ حاصل می‌شود. در این بخش عملکرد روش GMCO-DL را در شناسایی داده‌های پرت مورد بررسی قرار می‌دهیم. مسأله‌ی بهینه‌سازی GMCO-DL در رابطه‌ی (۱۸) بیان شده است. برای پیاده‌سازی این ماتریس، پارامتری را به عنوان درصد داده‌ی پرت تعریف می‌نماییم. این پارامتر بیانگر، تعداد درایه‌های آغشته شده به داده‌ی پرت نسبت به تعداد کل درایه‌های مشاهده شده می‌باشد. با در نظر گرفتن یک مقدار ثابت برای SNR و در درصد مشاهدات متفاوت اقدام به شناسایی درایه‌هایی که با داده‌های پرت آغشته شده‌اند می نماییم. جدول ۱ توضیحات مربوط به شبیه‌سازی این بخش را نشان می‌دهد:

جدول (۱): شرایط شبیه‌سازی روش GMCO-DL در مشاهدات یکنواخت

ابعاد ماتریس داده	درصد مشاهدات	درصد داده‌ی پرت	SNR(dB)
$\mathbf{T} \in R^{150\times50}$	٪۲۰ تا ٪۶۰	٪۱۰	۵

نتایج حاصل از شناسایی داده‌های پرت در شکل ۲ نشان داده شده است که از پنج نمودار تشکیل شده است و هر نمودار، نمایی از ماتریس در درصد مشاهدات مختلف را نشان می دهد. در این نمودارها، نقاط قرمز بیانگر درایه‌هایی است که به آن‌ها داده‌ی پرت اضافه شده است و GMCO-DL نتوانسته آن ها را تشخیص دهد. همچنین نقاط آبی نشان‌دهنده‌ی درایه‌هایی است که GMCO-DL به عنوان داده‌ی پرت شناسایی کرده است. تعداد کل درایه‌های آغشته شده به داده‌ی



شکل (۲): عملکرد GMCO-DL در شناسایی داده‌ی پرت برای درصد مشاهدات متفاوت

پرت در زیر هر نمودار نشان داده شده است. نتایج شبیه‌سازی بیانگر عملکرد مطلوب روش پیشنهادی در شناسایی داده‌های پرت برای اطلاعات بیان شده در جدول ۱ می‌باشد. دقت شناسایی داده‌های پرت در این روش در حدود ۹۵ درصد می‌باشد. به عبارت دیگر روش GMCO-DL در شناسایی داده‌های پَرت موفق‌تر عمل می‌کند. بدین ترتیب با اجرای متعدد الگوریتم برای داده‌های مختلف نتیجه می‌شود که GMCO-DL در برابر داده‌ی پرت مقاوم است. این بدان علت است که عبارت نرم l_1 ماتریس و عبارت تغییرات کل برای مدل‌سازی ارتباط بین درایه‌ها به مسأله اضافه شده است.

همچنین برای مقایسه میزان کارایی GMCO-DL در بازیابی ماتریس از معیار RMSE استفاده می‌نماییم.

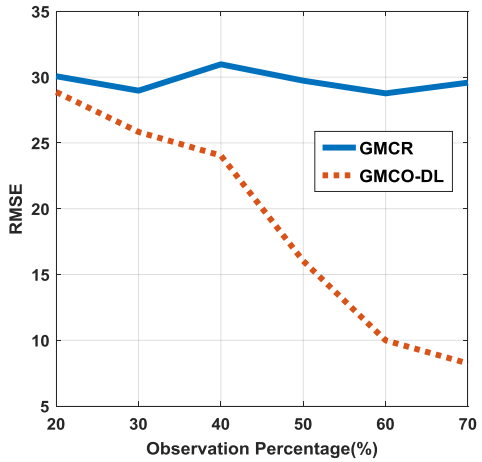
$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N} * \mathrm{L}} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{L}} (\mathbf{T}_{\mathrm{ij}} - \mathbf{X}_{\mathrm{ij}})^2} \qquad (۲۰)$$

میزان خطای بازیابی ماتریس از طریق روش GMCO-DL در شرایط مشاهدات آغشته شده به نویز و داده‌ی پرت در شکل ۳ قابل مشاهده است. کارایی این روش نسبت به روش GMCR سنجیده می‌شود. این شکل بر اساس اطلاعات جدول ۱ اقدام به بازیابی ماتریس می‌نمایند.

کارایی روش پیشنهادی GMCO-DL در مقایسه با روش مرجع GMCR در شکل ۳ مقایسه شده است. وجود داده‌ی پرت در مشاهدات موجب شده است تا روش GMCR توانایی بازیابی ماتریس را نداشته باشد. به عبارت دیگر، حتی در هنگامی که درصد مشاهدات افزایش می‌یابد، امکان بازیابی ماتریس از روش GMCR امکان‌پذیر نیست. زیرا در تابع هدف و مدل ریاضی ماتریس مشاهده، داده پرت درنظر گرفته نشده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، مساله تکمیل ماتریس گراف در حضور داده پرت مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور روش GMCO-DL معرفی شده است. در این روش از ماتریس لاپلاسین جهت‌دار برای تعریف عبارت تغییرات کل گراف استفاده نمودیم. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که روش GMCO-DL می‌تواند بیش از ۹۰ درصد درایه‌هایی را که به داده‌ی پَرت آغشته شده‌اند، شناسایی نماید. این امر سبب می‌شود تا الگوریتم پیشنهادی، ماتریس مورد نظر را با خطای کمتری نسبت به روش GMCR بازیابی نماید.



شکل (۳): خطا بازیابی در معیار RMSE بر حسب درصد مشاهدات

مراجع

[۱] مودتی سمیرا. "تشخیص آریتمی‌های قلبی براساس تبدیل بسته موجک و الگوریتم فاکتورگیری ماتریس غیرمنفی تنک." نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران ۱۳۹۹; ۱۷ (۳) :۱۲۸-۱۱۹

[۲] مجیدیان سینا، کهائی محمدحسین. "تخمین هاپلوتایپ با استفاده از فاکتورسازی ماتریس رتبه پایین در حضور داده پرت". نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران۱۴۰۰; ۱۸ (۳) :۱۱۳-۱۲۰.

[۳] مجیدیان سینا، کهائی محمدحسین. "تخمین هاپلوتایپ با استفاده از ریلکس‌سازی بهینه‌سازی چندجمله‌ای". نشریه مهندسی برق دانشگاه تبریز, ۵۰, ۲, ۱۳۹۹, ۸۵۵-۸۶۳.

[۴] مجیدیان سینا، حدادی فرزان. "تخمین جهت منابع با استفاده از زیرفضای ختری-رائو". نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران. ۱۳۹۶; ۱۴ (۲) :۳۷-۴۷.

[5] Chatterjee, Sourav. "A deterministic theory of low rank matrix completion." IEEE Transactions on Information Theory 66.12 : 8046-8055..2020.

[6] Candes, Emmanuel J., and Yaniv Plan. "Matrix completion with noise." Proceedings of the IEEE 98.6 (2010): 925-936.

[7] Majidian, Sina, Mohamad Mahdi Mohades, and Mohammad Hossein Kahaei. "Matrix completion with weighted constraint for haplotype estimation." Digital Signal Processing 108 (2021): 102880.

[8] Majidian, Sina, and Mohammad Hossein Kahaei. "NGS based haplotype assembly using matrix completion." PLoS One 14.3 (2019): e0214455.

[9] Nie, Feiping, et al. "Robust Matrix Completion With Column Outliers." IEEE Transactions on Cybernetics (2021).

[10] Akrami, Neda, Koorush Ziarati, and Soumyabrata Dev. "Graph-based local climate classification in Iran." International Journal of Climatology 42.3 (2022): 1337-1353.

[11] Fathi, Hamid, Emad Rangriz, and Vahid Pourahmadi. "Two Novel Algorithms for Low-Rank Matrix Completion Problem." IEEE Signal Processing Letters 28 (2021): 892-896.

[12] Ahmadi, Alireza, Sina Majidian, and Mohammad Hossein Kahaei. "Matrix Completion Using Graph Total Variation Based on Directed Laplacian Matrix." Circuits, Systems, and Signal Processing 40.6 (2021): 3099-3106.

[13] Daei, Sajad, Farzan Haddadi, and Arash Amini. "Distribution-aware block-sparse recovery via convex optimization." IEEE Signal Processing Letters 26.4 (2019): 528-532.

[14] Garg, Vaibhav, et al. "DOA Estimation via Shift-Invariant Matrix Completion." Signal Processing, 107993. 2021.

[15] Chen, Yaru, et al. "A novel hierarchical deep matrix completion method." IEEE Access, 2021.

[16] Kyrillidis, Anastasios, et al. "Provable compressed sensing quantum state tomography via non-convex methods." Nature Quantum Information 4.1 : 1-7. 2018.

[17] Nguyen, Luong Trung, Junhan Kim, and Byonghyo Shim. "Low-rank matrix completion: A contemporary survey." IEEE Access. 7 (2019): 94215-94237.

[18] Chen, Siheng, et al. "Signal recovery on graphs: Variation minimization." IEEE Transactions on Signal Processing 63.17 (2015): 4609-4624.

[19] Sandryhaila, Aliaksei, and José MF Moura. "Discrete signal processing on graphs." IEEE transactions on signal processing 61.7 (2013): 1644-1656.

[20] Sandryhaila, Aliaksei, and Jose MF Moura. "Big data analysis with signal processing on graphs: Representation and processing of massive data sets with irregular structure." IEEE Signal Processing Magazine 31.5 (2014): 80-90.

[21] Candès, Emmanuel J., and Terence Tao. "The power of convex relaxation: Near-optimal matrix completion." IEEE Transactions on Information Theory 56.5 (2010): 2053-2080.

[22] Singh, Rahul, Abhishek Chakraborty, and B. S. Manoj. "Graph Fourier transform based on directed Laplacian." Signal Processing and Communications (SPCOM), 2016 International Conference on. IEEE, 2016.

[23] Li, Yongmou, et al. "A Graph-Based Method for Active Outlier Detection With Limited Expert Feedback." IEEE Access 7 (2019): 152267-152277.

[24] Li, Ji, Jian-Feng Cai, and Hongkai Zhao. "Robust Inexact Alternating Optimization for Matrix Completion with Outliers." Journal of Computational Mathematics 38.2: 337-354. 2020.

[25] Wang, Qianqian, et al. "Anomaly-Aware Network Traffic Estimation via Outlier-Robust Tensor Completion." IEEE Transactions on Network and Service Management 17.4: 2677-2689. 2020.

[26] Tan, Teng, Lingwen Zhang, and Qiumei Li. "An Efficient Fingerprint Database Construction Approach Based on Matrix Completion for Indoor Localization." IEEE Access 8: 130708-130718. 2020.

زیرنویس‌ها

[1] Low rank
[2] Singular Values
[3] Machine learning
[4] Quantum state topography
[5] Outlier
[6] Adjacency matrix
[7] Non-deterministic Polynomial-time Hard (NP-Hard)
[8] Nuclear norm
[9] Graph signal Matrix Completion via total variation Minimization
[10] Graph signal Matrix Completion via total variation Regularization
[11] Additive White Gaussian Noise