

طراحی کنترل غیرخطی مقاوم بهینه برای گروهی از سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری

پیمان احمدی^۱ حسن زرآبادی پور^۲

۱- دانشجوی دکتری- دانشکده فنی و مهندسی- دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)- قزوین- ایران

p.ahmadi@edu.ikiu.ac.ir

۲- دانشیار- دانشکده فنی و مهندسی- دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)- قزوین- ایران

hzarabadi@eng.ikiu.ac.ir

چکیده: در این مقاله یک روش کنترل غیرخطی بهینه مقاوم^۱ بر پایه حل معادله ریکاتی وابسته به حالت^۲ (SDRE)، برای گروهی از سیستم‌های غیرخطی با مرتبه کسری ارائه شده است. کنترل SDRE، روشی برای حل مسئله بهینه برای سیستم‌های غیرخطی است که دارای نقاط وضعی از جمله مقاوم نبودن این روش در مقابل اغتشاشات و نامعینی‌ها و نیز زمان محدود^۳ نبودن همگرایی حالت‌های سیستم در این روش است. روش کنترل مد لغزشی^۴ (SMC) نیز از روش‌های متداول کنترل سیستم‌های غیرخطی است که با وجود آنکه روش کنترل بهینه محسوب نمی‌شود، دارا بودن مزایای بزرگی چون مقاوم بودن آن در مقابل اغتشاشات و نامعینی‌ها، آن را بسیار پرکاربرد کرده است. در روش پیشنهادی، برای داشتن کنترل غیرخطی بهینه و مقاوم، از ترکیب دو روش SMC و SDRE استفاده شده است، بطوری که مناسب برای گروهی از سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری^۵ باشد. روش کنترل پیشنهادی دارای ساختاری مقاوم در برابر اغتشاشات از نوع ناسازگار^۶ نیز می‌باشد. پایداری سیستم حلقه‌بسته با استفاده از تئوری لیاپانوف تضمین شده است و با ارائه مثال‌های شبیه‌سازی، بهبود عملکرد روش ارائه شده نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: سیستم مرتبه کسری، کنترل مد لغزشی، کنترل SDRE، اغتشاش ناسازگار

نوع مقاله: پژوهشی

DOI: 10.52547/jiaeee.20.3.159

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۱۱

تاریخ پذیرش مشروط مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۳۰

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۰۲

نام نویسنده‌ی مسئول: دکتر حسن زرآبادی پور

نشانی نویسنده‌ی مسئول: ایران- قزوین- خیابان نوروزیان- دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)- دانشکده‌ی فنی و مهندسی- گروه کنترل

۱- مقدمه

کنترلی متفاوت انجام شده است. در مرجع [۳۰] به ترکیب روش‌های SDRE و FTSMC برای داشتن کنترل مقاوم و بهینه جهت کنترل سیستم درایو چند موتور پدیده شده است. در مرجع [۸] کنترل غیرخطی بهینه مقاوم برای یک توربین بادی مجهز به ژنراتور القایی ارائه شده است. مرجع [۲۱] نیز به ترکیب روش‌های SDRE و مد لغزشی انتگرالی پرداخته است. همچنین در [۲۷] از ترکیب این روش‌ها در کنترل یک نوع روبات استفاده شده است. مقاله [۲۰] به طراحی کنترل مد لغزشی بر پایه روش SDRE برای تنظیم قند خون بیماران دیابتی پرداخته است. حل مسئله زیربهینه برای یک فضاپیما با کنترل مد لغزشی بر پایه SDRE نیز در [۲۲] ارائه شده است. مراجع و بررسی‌های فوق در حوزه سیستم‌های با مرتبه صحیح^۷ (IO) ارائه شده‌اند. این مقاله به ارائه یک روش کنترل غیرخطی بهینه با ترکیب روش‌های SDRE و SMC، برای گروهی از سیستم‌های مرتبه کسری می‌پردازد. ذکر این نکته ضروری است که عمده روش‌های کنترل که در برابر اغتشاشات مقاوم هستند، تنها قابلیت حذف اثر اغتشاش سازگار^۸ را دارند و در برابر اغتشاش از نوع ناسازگار با خطای حالت دائم همراه می‌شوند و حتی ممکن است ناپایدار شوند [۷]. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد اختلاف این دو نوع اغتشاش به مرجع [۷] مراجعه شود. در این مقاله برای داشتن روش کنترلی مقاوم در برابر اغتشاشات ناسازگار، رویکرد اغتشاش برای سیستم مرتبه کسری طراحی شده و از اطلاعات رویکرد در ساختار کنترل کننده استفاده می‌شود. پایداری روش پیشنهادی با تئوری پایداری لیاپانوف تضمین می‌شود. با ارائه مثال‌های شبیه‌سازی، عملکرد روش پیشنهادی نشان داده می‌شود.

ساختار مقاله به صورت زیر است: در بخش ۲، مروری بر کنترل SDRE انجام شده و نیز برخی تعاریف و خواص محاسبات کسری ارائه می‌شود. بخش ۳ به طراحی کنترل کننده پیشنهاد شده و تحلیل پایداری آن می‌پردازد. بخش ۴ به ارائه مثال‌های شبیه‌سازی‌های و تحلیل نتایج آن‌ها می‌پردازد و در بخش ۵ نتیجه‌گیری‌های حاصل شده ارائه می‌شود.

۲- مروری بر کنترل SDRE و ارائه برخی تعاریف و خواص محاسبات کسری

۲-۱- مروری بر کنترل SDRE

همانگونه که اشاره شد، کنترل SDRE تعمیم کنترل LQR برای سیستم‌های غیرخطی است و در واقع SDRE حل تقریبی مسئله بهینه برای سیستم غیرخطی است. در ادامه، ساختار کلی این شیوه کنترلی از مرجع [۲۷] آورده می‌شود.

سیستم غیرخطی به فرم کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= f(X) + g(X)u(t) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \quad (1)$$

کنترل مد لغزشی (SMC) یکی از موثرترین راهکارها برای کنترل سیستم‌های غیرخطی با خطاهای بزرگ در مدلسازی است، که به‌طور گسترده در طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های در مواجهه با اغتشاشات و نامعینی‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. مزایای زیادی چون همگرایی سریع حالت‌ها، خاصیت مقاوم بودن و عدم حساسیت در برابر خطاهای مدل و اغتشاشات، آن را به روشی کارآمد تبدیل کرده است [۱۵، ۱۶، ۲۳، ۳۱]. تا کنون پیشنهادات زیادی در راستای بهبود سرعت همگرایی حالت‌ها در روش مد لغزشی و نیز کاهش اثرات نامطلوب پدیده زیگزاک ارائه شده است. به عنوان مثال روش مد لغزشی ترمینال (TSMC)، در سال ۱۹۹۱ برای تضمین محدود بودن زمان همگرایی حالت‌ها، به عنوان اولین تلاش‌ها برای بهبود روش SMC ارائه شد [۱۱]. پس از آن روش‌های دیگری تحت عنوان کنترل مد لغزشی ترمینال سریع (FTSMC)، با موضوع افزایش بیشتر سرعت همگرایی حالت‌ها معرفی شد [۹]. حل مشکل سینگولاریتی در TSMC نیز در سال ۲۰۱۴ و در مرجع [۱۱] با عنوان روش مد لغزشی ترمینال سریع غیرسینگولار پیشنهاد شد.

با تمام این بهبودها، نادیده گرفتن ملاحظات بهینگی در فرآیند طراحی کنترل SMC، از کاستی‌های آن محسوب می‌شود. بطور کلی، چالش اصلی در حل مسئله کنترل بهینه غیرخطی، حل معادله هامیلتون-ژاکوبی-بلمن (HJB) است که به سبب وجود المان‌های غیرخطی در معادله HJB، بسیار دشوار می‌شود [۳۰]. روش‌های تقریبی زیادی برای حل معادله HJB برای سیستم‌های غیرخطی ارائه شده است، که یکی از آن‌ها روش SDRE است [۲، ۲۵]. کنترل SDRE روشی منعطف برای کنترل بهینه سیستم‌های غیرخطی است. این روش می‌تواند پایداری سیستم غیرخطی را تضمین کند و به دلیل داشتن بار محاسباتی کم، جهت پیاده‌سازی عملی مناسب است [۳۰]. تاکنون این روش برای کنترل بسیاری از سیستم‌ها بکار گرفته شده است. برای نمونه، در [۱۷] از روش SDRE برای کنترل موتور سنکرون مغناطیس دائم استفاده شده است. مرجع [۱۴] به ارائه روش SDRE برای تنظیم بهینه گلوکز خون- انسولین بیمار دیابتی نوع ۱ پرداخته است. در مرجع [۲۶] به طراحی کنترل SDRE برای پایدارسازی زیرسیستم وضعیت یک ماهواره مدار LEO پرداخته شده است. تحلیل دینامیک‌های وضعیت و طراحی پایدارساز SDRE برای ماهواره‌های شکل‌دهی شده در مرجع [۳] ارائه شده است. تحقیقات بیشتری در حوزه استفاده از کنترل SDRE را می‌توان در مراجع [۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۸، ۲۹] یافت که شامل کاربردهای مختلف روباتیک، زیردریایی و موشکی می‌شود.

در برخی از مراجع، برای دستیابی به روش یک کنترلی غیرخطی که هم مقاوم باشد و هم بهینه، به ترکیب دو روش SDRE و SMC پرداخته شده است. این ترکیب به شیوه‌های مختلف و برای اهداف

لم ۲) رابطه زیر در مورد انتگرال مرتبه کسری با تعریف RL برقرار است [۶].

$$I^\alpha \{I^\beta f(t)\} = I^\beta \{I^\alpha f(t)\} = I^{\alpha+\beta} f(t) \quad (10)$$

لم ۳) مشتق مرتبه کسری با مشتق مرتبه صحیح خاصیت جابجایی دارد [۶].

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^\alpha \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}_a D_t^{\alpha+n} f(t) \quad (11)$$

۳- طراحی کنترل کننده مد لغزشی بر پایه کنترل SDRE

در این بخش، ساختار کنترل کننده پیشنهادی در این مقاله ارائه می شود. سیستم غیرخطی مرتبه کسری داده شده در معادله (۱۲) را در نظر بگیرید.

$$D^\alpha X = f(X) + gu \quad (12)$$

قانون کنترل پیشنهادی ارائه شده در این مقاله، برای سیستم های غیرخطی مرتبه کسری به فرم کلی رابطه (۱۲) قابل طراحی و اعمال است. در این رابطه $X_{n \times 1}$ بردار حالت های سیستم است. می تواند حاوی توابع غیرخطی بر حسب متغیرهای حالت سیستم باشد و g در این مقاله ماتریس ثابت در نظر گرفته می شود. $u_{m \times 1}$ بردار ورودی کنترلی است. پارامتر n تعداد حالت های سیستم و $0 < \alpha < 1$ مرتبه کسری سیستم است.

برای کنترل مد لغزشی، سطح لغزش به فرم کلی (۱۳) در نظر گرفته می شود.

$$S(s_{op}(x(t)), \xi(t)) = s_{op}(x(t)) + \xi(t) \quad (13)$$

تابع $s_{op}(x(t))$ شامل دینامیک های خطاست که می تواند به فرم کلی $s_{op}(x(t)) = CX$ انتخاب شود C ماتریس انتخابی است. همچنین $\xi(t)$ تابع کمکی است که برای صفر کردن مشتق سطح لغزش استفاده می شود و در ادامه تعیین می شود. کنترل مد لغزشی از دو بخش تشکیل می شود. بخش اول برای همگرایی حالت ها از مقادیر اولیه دلخواه تا سطح لغزش و بخش دوم برای نگه داشتن و بازگرداندن حالت ها روی سطح لغزش است که در اثر اغتشاشات و نامعینی ها از سطح لغزش جدا می شوند. برای برقراری بخش اول باید شرط $\dot{S}(s_{op}(x(t)), \xi(t)) = 0$ برقرار شود. با مشتق گیری از رابطه (۱۳) و با تعیین $\xi(t)$ از رابطه (۱۴)، \dot{S} صفر شده و حالت ها به سطح لغزش همگرا می شوند [۱۹].

$$\dot{\xi}(t) = -\frac{\partial S_{op}(x(t))}{\partial X} D^{-(\alpha-1)} (f(X) + gu_{op}) \quad (14)$$

در معادله (۱۴)، u_{op} به فرم کنترل بهینه SDRE (معادله (۵)) در نظر گرفته می شود. برای برقراری بخش دوم کنترل SMC از تابع علامت استفاده می شود. بنابراین قانون کنترل نهایی را می توان در معادلات (۱۵) نشان داد.

که در آن $X_{n \times 1}$ بردار حالت های سیستم است. $f(X)_{n \times 1}$ و $g(X)_{n \times m}$ حاوی توابع غیرخطی هستند و $u_{m \times 1}$ بردار ورودی کنترلی است. n تعداد حالت های سیستم و m تعداد ورودی ها است. سیستم غیرخطی (۱) را می توان به فرم کلی فضای حالت با ماتریس های وابسته به حالت $A(x)$ و $B(x)$ ، به صورت (۲) زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} f(X) &= A(X)X(t) \\ g(X) &= B(X) \end{aligned} \quad (2)$$

هدف، کمینه کردن تابع معیار (۳) است.

$$J = 0.5 \int_0^\infty (X^T(t)QX(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (3)$$

که در آن، Q و R ماتریس های وزنی انتخابی می باشند، که به ترتیب مثبت نیمه معین و مثبت معین هستند. تابع هامیلتون، به صورت معادله (۴) را تشکیل داده شده و شرایط بهینگی توسط آن تعیین می شود.

$$\begin{aligned} H(X, u) &= 0.5X^T QX + 0.5u^T Ru + \\ &\lambda^T (f(X) + g(X)u) \end{aligned} \quad (4)$$

با برقراری شرایط بهینگی از تابع هامیلتون (۴)، قانون کنترل SDRE بصورت رابطه (۵) استخراج می شود.

$$u(t) = -R^{-1} B^T(X)P(X)X \quad (5)$$

که ماتریس $P(x)$ از حل معادله ریکاتی (۶) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \dot{P}(X) + A^T(X)P(X) + P(X)A(X) - \\ P(X)B(X)R^{-1}B^T(X)P(X) + Q = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

در هر زمان نمونه برداری، ماتریس های $A(x)$ و $B(x)$ به روز رسانی شده و یکبار معادله ریکاتی حل می شود.

۲-۲- ارائه برخی تعاریف و خواص محاسبات کسری

محاسبات مرتبه کسری در سال های اخیر و در مدل سازی بسیاری از پدیده های فیزیکی مورد توجه واقع شده است. این محاسبات، تعمیمی بر محاسبات مرتبه صحیح است و مطالعات بسیاری برای گسترش انواع مختلف روش های کنترل کلاسیک به مرتبه کسری صورت گرفته است [۴]. تعاریف بسیاری از مشتق و انتگرال مرتبه کسری وجود دارد که دو تعریف کاپوتو (C) و ریمان-لیوویل (RL) پر کاربرد هستند. در این مقاله از تعریف مشتق مرتبه کسری ریمان-لیوویل استفاده می شود، که بصورت (۷) است.

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (7)$$

که در آن $n-1 < \alpha < n$ ، $\alpha > 0$ ، n عضو مجموعه اعداد طبیعی و $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما است [۵]. رابطه تبدیل لاپلاس با تعریف مشتق RL بصورت (۸) بدست می آید [۶].

$$\int_0^\infty e^{-st} {}^R D_t^\alpha f(t) dt = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k {}^R D_t^{\alpha-k-1} f(t)|_{t=0} \quad (8)$$

لم ۱) رابطه (۹) همواره برقرار است [۶].

$${}^{RL}D^\alpha \{I^\alpha f(t)\} = f(t) \quad (9)$$

$$\text{System: } \begin{cases} D^\alpha x_1 = x_2 + d_1 \\ D^\alpha x_2 = a(x) + b(x)u + d_2 \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{Observer: } \begin{cases} D^\alpha p = -lp - l(x + \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)u) \\ \hat{d}(t) = p + lx \end{cases}$$

در سیستم رابطه (۱۷)، d_1 اغتشاش ناسازگار و d_2 اغتشاش سازگار نامیده می‌شود. همچنین در ساختار رویتگر، $\tilde{f}(x) = [x_2, a(x)]^T$ ، $\tilde{g}(x) = [0, b(x)]^T$ و $d(t) = [d_1(t), d_2(t)]^T$ و L بهره رویتگر است. p نیز یک حالت داخلی رویتگر است. برای آنکه کنترل پیشنهادی رابطه (۱۵) توانایی حذف اثر اغتشاش را داشته باشد، کافی است به جای ساختار $u_{op} = -R^{-1}g^T P(X)X$ در کنترل کننده از $u_{op} = -R^{-1}g^T P(X)(X + \hat{d})$ استفاده شود، که بردار حاوی اغتشاشات ناسازگار است (به مثال شبیه‌سازی ۲ مراجعه شود).

۴- شبیه‌سازی

در این بخش، نتایج حاصل از اعمال کنترل پیشنهادی روی دو مثال شبیه‌سازی ارائه می‌شود و نتایج آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. شبیه‌سازی‌ها در محیط سیمولینک نرم‌افزار متلب انجام شده است. یکی از روش‌های متداول در کاهش نوسانات زیگزاک در روش کنترل مد لغزشی، استفاده از توابع هموارتر بجای تابع علامت است. در این شبیه‌سازی‌ها، جهت کاهش اثرات پدیده زیگزاک از تابع اشباع به جای تابع علامت، در کنترل کننده استفاده شده است.

۴-۱- مثال شبیه‌سازی ۱

مثال شبیه‌سازی اول، کاربرد روش پیشنهادی، روی یک سیستم مرتبه کسری در مواجهه با اغتشاش سازگار را نشان می‌دهد. مدل ریاضی سیستم غیرخطی مرتبه کسری مورد مطالعه در رابطه (۱۸) داده شده است.

$$\text{System: } \begin{cases} D^{0.9} x_1 = -x_1^2 + x_2 \\ D^{0.9} x_2 = x_1 - x_2^2 \sin(x_1) + u + d_2 \end{cases} \quad (18)$$

قانون کنترل پیشنهادی (رابطه (۱۵)) به سیستم (۱۸) اعمال شده و نتایج، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در تابع معیار (۳) $R=1$ و $Q = [1 \ 0; 0 \ 1]$ در نظر گرفته شده و نیز $K = [10 \ 1]^T$ و $X_0 = [0.5, -0.5]^T$ در نظر گرفته شده است. در این مثال فرض می‌شود که اغتشاش d_2 به شکل تابع پله با دامنه 0.7 در زمان $t=9s$ به سیستم اعمال شود. نتایج شبیه‌سازی در ادامه آورده می‌شود. شکل ۱، همگرایی حالت‌های سیستم را در حضور اغتشاش سازگار و در حالی که از کنترل SDRE استفاده شده است، نشان می‌دهد.

$$u = u_{op} + u_c = -R^{-1}g^T P(X)X - g^T K D^{(\alpha-1)} \text{sgn}(S(s_{op}(x(t)), \xi(t)))$$

$$\begin{cases} S(s_{op}(x(t)), \xi(t)) = s_{op}(x(t)) + \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) = -\frac{\partial S_{op}(x(t))}{\partial X} D^{-(\alpha-1)}(f(X) + gu_{op}) \\ u_{op} = -R^{-1}g^T P(X)X \end{cases} \quad (15)$$

$K_{n \times 1}$ بردار ثابت انتخابی است.

قضیه:

قانون کنترل مد لغزشی بهینه‌ی ارائه شده در (۱۵) می‌تواند پایداری سیستم غیرخطی مرتبه کسری داده شده در (۱۲) را تضمین کند.

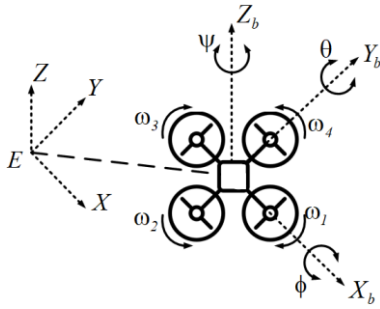
اثبات:

تابع لیانوف V را بصورت $V = 0.5S^2$ در نظر بگیرید. در اینصورت با مشتق‌گیری از V نسبت به t داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S\dot{S} = S\left(\dot{\xi}(t) + \frac{\partial S_{op}(x(t))}{\partial X} D^{-(\alpha-1)}(f(X) + g(u_{op} + u_c))\right) \\ &= S\left(\underbrace{\frac{\partial S_{op}(x(t))}{\partial X} D^{-(\alpha-1)}(f(X) + gu_{op}) + \dot{\xi}(t)}_{=0}\right) \\ &\quad - \frac{\partial S_{op}(x(t))}{\partial X} g(g^T K) \text{sgn}(S(s_{op}(x(t)), \xi(t))) \\ &= -|S| \frac{\partial S_{op}(x(t))}{\partial X} g(g^T K) \end{aligned} \quad (16)$$

با توجه به اینکه این روش برای سیستم‌هایی ارائه شده است که ماتریس معادل g در آن‌ها ثابت است و $s_{op}(x(t)) = CX$ فرض شده و ماتریس C نیز انتخابی است، می‌توان C را طوری یافت که عبارت $|S| \frac{\partial S_{op}(x(t))}{\partial X} g(g^T K) \geq \eta > 0$ برقرار باشد. بنابراین طبق قانون پایداری لیانوف، سیستم حلقه‌بسته توصیف شده در (۱۲) با قانون کنترل (۱۵) پایدار است. همچنین η بیشینه اندازه اغتشاش اعمال شده به سیستم است. ■

همانگونه که در بخش مقدمه ذکر شد، کنترل SMC باوجود اینکه روش مقاوم غیرخطی است، اما توانایی حذف اثر اغتشاش نوع ناسازگار را ندارد. یکی از راهکارهای حذف اثر این نوع اغتشاش، تخمین آن توسط یک رویتگر اغتشاش و استفاده از سیگنال اغتشاش تخمین زده شده، به عنوان سیگنال معلوم، در ساختار کنترل کننده است [۱۷]. در ادامه، ساختار یک رویتگر اغتشاش ناسازگار آورده می‌شود و از آن در حذف اثر اغتشاش ناسازگار اعمالی به سیستم استفاده می‌شود. فرم کلی سیستم غیرخطی مرتبه کسری و رویتگر اغتشاش ناسازگار در رابطه (۱۷) آورده شده است [۲۴].



شکل (۳): زوایای اوایلر، روبات چهارپره

جدول (۱): پارامترهای فیزیکی مدل چهارپره

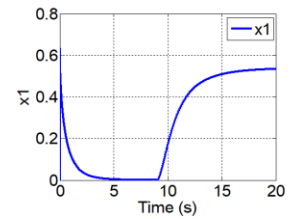
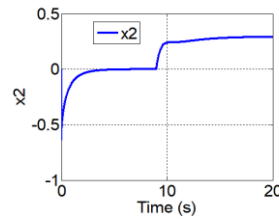
نام پارامتر	مقادیر پارامترها
I_x	0.0154 kg.m^2
I_y	0.0150 kg.m^2
I_z	0.0309 kg.m^2
J_R	$1.5 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^2$
l	0.3 m

مدل مرتبه صحیح زیرسیستم وضعیت روبات چهارپره از مرجع [۲۸] بصورت (۱۹) است.

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \dot{\psi} \dot{\theta} \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{J_R}{I_x} \dot{\theta} \omega_d + \frac{l}{I_y} u_1 \\ \ddot{\theta} = \dot{\phi} \dot{\psi} \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{J_R}{I_y} \dot{\phi} \omega_d + \frac{l}{I_y} u_2 \\ \ddot{\psi} = \dot{\phi} \dot{\theta} \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{1}{I_z} u_3 \end{cases} \quad (19)$$

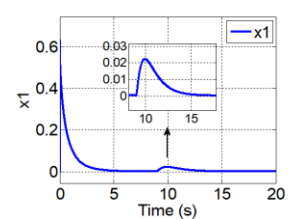
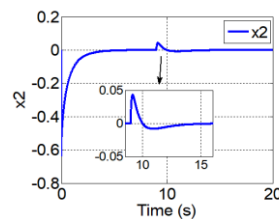
فرم مرتبه کسری معادلات (۱۹) در رابطه (۲۰) نوشته شده و به عنوان مدل شبیه‌سازی برای زیرسیستم وضعیت روبات چهارپره در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} x_1 = \phi, x_2 = \dot{\phi}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}, x_5 = \psi, x_6 = \dot{\psi} \\ f(X) = \begin{bmatrix} x_2 & x_6 x_4 \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{J_R}{I_x} x_4 \omega_d & x_4 \\ x_2 x_6 \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{J_R}{I_y} x_2 \omega_d & x_6 & x_2 x_4 \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) \end{bmatrix}^T \\ g = \begin{bmatrix} 0 & \frac{l}{I_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{I_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \\ D^{0.93} X = f(X) + g \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + [d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6]^T \end{aligned} \quad (20)$$



شکل (۱): پایدارسازی حالت‌های سیستم با اعمال مقادیر اولیه و در حضور اغتشاش سازگار با کنترل SDR

همانگونه که اشاره شده بود، کنترل SDR ذاتا روش کنترلی مقاوم در برابر اغتشاشات محسوب نمی‌شود و در این مثال نیز نتوانسته است اثر اغتشاش اعمالی به سیستم را حذف کند و پس از اعمال اغتشاش، خطای حالت ماندگار قابل ملاحظه‌ای در همگرایی حالت‌ها باقی مانده است. شکل ۲، همگرایی حالت‌ها در شرایط اعمالی شکل ۱ را نشان می‌دهد، با این تفاوت که کنترل کننده استفاده شده در این شبیه‌سازی، کنترل کننده پیشنهادی مقاله است. بخش مد لغزشی کنترل کننده پیشنهادی، به حذف اثر اغتشاش کمک کرده است. دیده می‌شود که حالت‌های سیستم بعد از اعمال اغتشاش، مجدداً به صفر همگرا می‌شوند.



شکل (۲): پایدارسازی حالت‌های سیستم با اعمال مقادیر اولیه و در حضور اغتشاش سازگار با کنترل پیشنهادی

۴-۲- مثال شبیه‌سازی ۲

در مثال شبیه‌سازی دوم، طراحی کنترل کننده برای کنترل زیرسیستم وضعیت یک روبات چهارپره که در مواجهه با اغتشاشات از نوع سازگار و ناسازگار قرار دارد، ارائه می‌شود. مدل ریاضی چهارپره دارای دو قسمت کلی است، یکی زیرسیستم وضعیت و دیگری زیرسیستم موقعیت. متغیرهای زیرسیستم وضعیت کاملاً مستقل از متغیرهای موقعیت سیستم هستند و این زیرسیستم دارای ۳ ورودی و ۳ خروجی است. زیرسیستم وضعیت از لحاظ ورودی-خروجی کاملاً دکوپله از زیرسیستم موقعیت است، اما هر یک از مولفه‌های وضعیت در تغییر پارامتر دیگر تاثیر مستقیم دارد و بین مولفه‌های زیرسیستم وضعیت، تداخل قوی وجود دارد. ϕ زاویه چرخ (چرخش حول محور X)، θ زاویه فراز (چرخش حول محور Y) و ψ زاویه سمت (چرخش حول محور Z) است. این زوایا در شکل ۳ نشان داده شده‌اند.

ضریب ω_d نشان دهنده اختلاف سرعت رتورهای چهارپره است. برای اطلاعات بیشتر در مورد آن [۲۸] را ببینید. ضرایب عددی مدل (۲۰) در جدول ۱ داده شده‌اند. نوع اغتشاشات اعمال شده به زیرسیستم وضعیت نیز در جدول ۲ داده شده است.

جدول (۲): اغتشاشات اعمالی به زیرسیستم وضعیت، دامنه و زمان

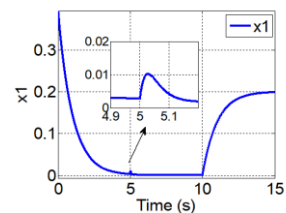
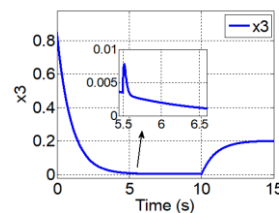
اعمال آن‌ها		
دامنه و زمان اعمال اغتشاش	نوع اغتشاش اعمال شده	نام اغتشاش
$0.2\ddot{u}(t-10)$	ناسازگار	d_1
$0.7\ddot{u}(t-5)$	سازگار	d_2
$0.2\ddot{u}(t-10)$	ناسازگار	d_3
$0.7\ddot{u}(t-5.5)$	سازگار	d_4
$0.15\ddot{u}(t-10)$	ناسازگار	d_5
$0.7\ddot{u}(t-6.5)$	سازگار	d_6

* $\ddot{u}(\cdot)$ تابع پله واحد است.

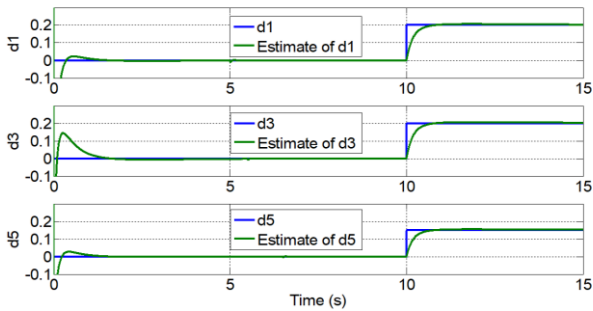
با مشخص بودن مقادیر ماتریس‌های $f(X)$ و g ، می‌توان ساختار کنترلی (۱۵) را برای سیستم داده شده طراحی کرد. همچنین برای طراحی بخش کنترل بهینه، Q ماتریس واحد در نظر گرفته شده است و $R=1$ است.

شکل ۴، پایداری زوایای وضعی رول، پیچ و یاو از زیرسیستم وضعیت روبات چهارپره را در حضور هر دو نوع اغتشاش ناسازگار و سازگار با اعمال کنترل پیشنهادی (۱۵) نشان می‌دهد. همانگونه که دیده می‌شود و انتظار می‌رود، اثر اغتشاش‌های از نوع سازگار در زمان محدودی حذف شده است، اما اعمال اغتشاشات از نوع ناسازگار باعث شده است که خطای ماندگار قابل توجه در همگرایی حالت‌ها ایجاد شود. علت این موضوع عدم توانایی حذف اثر اغتشاش‌های ناسازگار توسط کنترل SMC است. راهکار پیشنهاد شده تخمین این اغتشاشات و استفاده از آن در ساختار کنترل کننده است. با استفاده از ریتگر توصیف شده در رابطه (۱۷)، اغتشاشات d_1, d_2, d_3 تخمین زده شده‌اند و نتیجه آن در شکل ۵ آمده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود، اغتشاش اعمالی با سرعت مناسبی تخمین زده شده است. جهت حذف اغتشاش ناسازگار، در معادلات (۱۵) بجای کنترل u_{op} از ساختار زیر استفاده شده است، که در آن \hat{d}_i تخمین اغتشاش d_i است.

$$u_{op} = -R^{-1}g^T P(X)(X + [\hat{d}_1, 0, \hat{d}_3, 0, \hat{d}_5, 0]^T) \quad (21)$$

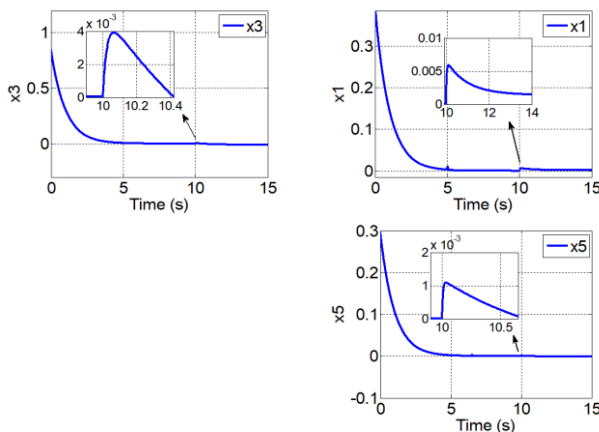


شکل (۴): حالت‌ها در حضور اغتشاش ناسازگار و سازگار با کنترل پیشنهادی، بدون استفاده از ریتگر اغتشاش ناسازگار



شکل (۵): تخمین اغتشاشات ناسازگار

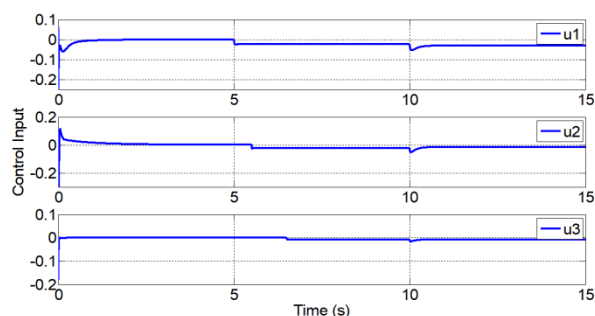
در شبیه‌سازی شکل ۶، همه شرایط شبیه‌سازی ۴ اعمال شده است، با این تفاوت که تغییر معادله (۲۱) در ساختار کنترل پیشنهادی (۱۵) اعمال شده است.



شکل (۶): خروجی در حضور اغتشاش سازگار و ناسازگار با کنترل پیشنهادی، با استفاده از ریتگر اغتشاش

همانگونه که ملاحظه می‌شود، با استفاده از اغتشاشات تخمین زده شده در ساختار کنترل، کنترل نهایی توانایی حذف اغتشاشات ناسازگار را نیز بدست آورده است. در نهایت برای اطمینان از مناسب بودن سیگنال‌های کنترلی، شکل ۷ ارائه شده است. این شکل نشان می‌دهد که ورودی‌های کنترلی دارای شرایط مناسبی از لحاظ دامنه و فرکانس تغییرات هستند. با محاسبه مقدار عددی تابع هزینه داده شده در رابطه (۳)، هزینه کنترلی در اعمال کنترل پیشنهادی برابر $J=1.7658$ بدست می‌آید، این در شرایطی است که اگر از کنترل کننده SMC معمولی (بدون در نظر گرفتن شرایط بهینگی) برای کنترل این سیستم استفاده شود، نمی‌توان به شکل بهینه‌ای از پاسخ دست یافت و در یک شرایط نسبتاً مشابه همگرایی حالت‌ها، $J=3.8431$ بدست آمد.

- [4] Baleanu D, Machado JAT, Luo AC. Fractional dynamics and control: Springer Science & Business Media. 2011.
- [5] Dadras S, Momeni HR. "Fractional terminal sliding mode control design for a class of dynamical systems with uncertainty", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 17: pp. 367-77, 2012.
- [6] Pisano A, Rapaic M, Jelicic Z, Usai E. "Nonlinear fractional PI control of a class of fractional-order systems", IFAC Proceedings Volumes, Vol. 45: pp. 637-42, 2012.
- [7] Yang J, Li S, Yu X. "Sliding-mode control for systems with mismatched uncertainties via a disturbance observer", IEEE Transactions on industrial electronics, Vol. 60: pp. 160-9, 2012.
- [8] Batmani Y, Khaloozadeh H. "Optimal chemotherapy in cancer treatment: state dependent Riccati equation control and extended Kalman filter", Optimal Control Applications and Methods, Vol. 34: pp. 562-77, 2013.
- [9] Jin M, Lee J, Ahn KK. "Continuous nonsingular terminal sliding-mode control of shape memory alloy actuators using time delay estimation", IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol. 20: pp. 899-909, 2014.
- [10] Kuo Y-L. "Robust chaos synchronizations using an SDRE-based sub-optimal control approach", Nonlinear Dynamics, Vol. 76: pp. 733-42, 2014.
- [11] Zheng J, Wang H, Man Z, Jin J, Fu M. "Robust motion control of a linear motor positioner using fast nonsingular terminal sliding mode", IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, Vol. 20: pp. 1743-52, 2014.
- [12] Rafikova E, de Vitro Gomez LH, Rafikov M. Tracking of Reference Robot Trajectory Using SDRE Control Method. Presented at European Consortium for Mathematics in Industry 2014.
- [13] Geranmehr B, Nekoo SR. "Nonlinear suboptimal control of fully coupled non-affine six-DOF autonomous underwater vehicle using the state-dependent Riccati equation", Ocean Engineering, Vol. 96: pp. 248-57, 2015.
- [14] Akhyani MS, Khaloozadeh H. "Optimal glucose-insulin regulatory system in type1 diabetic patients based on the nonlinear time delay models", Journal of Control, Vol. 8: pp. 31-41, 2015.
- [15] Lu P, Van Eykeren L, van Kampen E-J, Chu QP. 2015. Sensor fault detection and estimation for quadrotors using kinematic equations. In Advances in Aerospace Guidance, Navigation and Control, pp. 363-79: Springer
- [16] Xu SS-D, Chen C-C, Wu Z-L. "Study of nonsingular fast terminal sliding-mode fault-tolerant control", IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 62: pp. 3906-13, 2015.
- [17] Azizi A, Hesami Naghsbandy A, Batmany Y. "Robust Nonlinear Optimal Control of DFIG based Wind Turbine", Journal of Control, Vol. 10: pp. 69-80, 2017.
- [18] Pagotti AP, Rafikova E, Rafikov M. SDRE trajectory tracking control for a hovercraft autonomous vehicle. Presented at International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics 2017.
- [19] ahmadi P, Vali A-R, Behnamgol V. "Autopilot Design Using Smooth Fractional Order Sliding Mode Control", Journal of Nonlinear Systems in Electrical Engineering, Vol. 4: pp. 63-77, 2018.
- [20] Kuo Y-L. "Glucose concentration regulation using the SDRE-based sliding mode control", Journal of the Chinese Institute of Engineers, Vol. 41: pp. 26-31, 2018.



شکل (۷): سیگنال‌های کنترلی مربوط به شکل ۶

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش کنترل غیرخطی مقاوم بهینه برای گروهی از سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری (به فرم کلی ارائه شده در رابطه (۱۲)) پیشنهاد شد. کنترل‌کننده طراحی شده، توانایی حذف اغتشاشات از نوع سازگار و ناسازگار را دارد. روش پایه کنترلی، کنترل مد لغزشی است، که روشی مقاوم در برابر اغتشاشات سازگار است. برای بهینه بودن کنترل پیشنهادی، بخش اصلی ساختار کنترل مد لغزشی از نوع کنترل بهینه غیرخطی SDRE انتخاب شد و کنترل نهایی بصورت ساختار یکپارچه از ترکیب کنترل SMC و SDRE حاصل شد، که پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین می‌کند. برای حذف اغتشاشات از نوع ناسازگار، رویکرد اغتشاش ناسازگار به ساختار کنترلی اضافه شد و از اطلاعات اغتشاشات رویت شده، در ساختار کنترل‌کننده استفاده شد. برای بررسی عملکرد کنترل‌کننده پیشنهاد شده، از دو مثال شبیه‌سازی استفاده شد. در مثال شبیه‌سازی ۱ نشان داده شد که کنترل‌کننده پیشنهادی، ضمن پایداری سیستم، توانایی حذف اغتشاش سازگار اعمالی در سیستم مرتبه کسری مورد مطالعه را دارد. مثال شبیه‌سازی ۲ نیز عملکرد صحیح کنترل‌کننده پیشنهادی در پایداری و حذف اغتشاشات از نوع سازگار و ناسازگار در زیرسیستم وضعیت یک روبات چهارپایه را تایید کرد. از طرفی، کنترل پیشنهادی تنها برای سیستم‌هایی قابل استفاده است که ماتریس g آن‌ها (طبق رابطه (۱۲))، تنها حاوی اعداد ثابت باشد و این محدودیتی برای استفاده از کنترل پیشنهاد شده است.

مراجع

- [1] Venkataraman S, Gulati S. Terminal sliding modes: a new approach to nonlinear control synthesis. Presented at Fifth International Conference on Advanced Robotics' Robots in Unstructured Environments 1991.
- [2] Banks H, Lewis B, Tran HT. "Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent Riccati equation approach", Computational Optimization and Applications, Vol. 37: pp. 177-218, 2007.
- [3] Chang I, Park S-Y, Choi K-H. "Nonlinear attitude control of a tether-connected multi-satellite in three-dimensional space", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 46: pp. 1950-68, 2010.

- [21] Khoshhal Rudposhti M, Nekoui MA, Teshnehlab M. "Robust optimal control for a class of nonlinear systems with uncertainties and external disturbances based on SDRE", Cogent Engineering, Vol. 5: pp. 1451014, 2018.
- [22] Cao L, Qiao D, Xu J. "Suboptimal artificial potential function sliding mode control for spacecraft rendezvous with obstacle avoidance", Acta Astronautica, Vol. 143: pp. 133-46, 2018.
- [23] Guo J. "Application of full order sliding mode control based on different areas power system with load frequency control", ISA transactions, Vol. 92: pp. 23-34, 2019.
- [24] Shi S-L, Li J-X, Fang Y-M. "Fractional-disturbance-observer-based Sliding Mode Control for Fractional Order System with Matched and Mismatched Disturbances", International Journal of Control, Automation and Systems, Vol. 17: pp. 1184-90, 2019.
- [25] Batmani Y, Takht Abnus M. "Integrated Fault-detection and Control of DC Microgrids Using SDRE Observer-controller", Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers, Vol. 16: pp. 41-9, 2019.
- [26] Razzaghi P, Al Khatib E, Bakhtiari S. "Sliding mode and SDRE control laws on a tethered satellite system to de-orbit space debris", Advances in Space Research, Vol. 64: pp. 18-27, 2019.
- [27] Korayem A, Nekoo S, Korayem M. "Sliding mode control design based on the state-dependent Riccati equation: theoretical and experimental implementation", International Journal of Control, Vol. 92: pp. 2136-49, 2019.
- [28] Mallavalli S, Fekih A. "A fault tolerant tracking control for a quadrotor UAV subject to simultaneous actuator faults and exogenous disturbances", International Journal of Control, Vol. 93: pp. 655-68, 2020.
- [29] Geng Y, Li C, Guo Y, Biggs JD. "Fixed-time near-optimal control for repointing maneuvers of a spacecraft with nonlinear terminal constraints", ISA transactions, Vol. 97: pp. 401-14, 2020.
- [30] Wang M, Dong X, Ren X, Chen Q. "SDRE based optimal finite-time tracking control of a multi-motor driving system", International Journal of Control, Vol.: pp. 1-13, 2020.
- [31] Malekifard M, Ehyaei J, Ehyaei AF. "Hybrid Control of Cable Robots with Elastic Cables", Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers, Vol. 19: pp. 221-9, 2022.

زیر نویس ها

- ¹ Robust
- ² State-Dependent Riccati Equation
- ³ Finite Time
- ⁴ Sliding Mode Control
- ⁵ Fractional order
- ⁶ Mismatched
- ⁷ Integer Order
- ⁸ Matched