

کدگذاری مسئله CEO باینری با معیار اعوجاج فاصله همینگ بر اساس روش شکافت منبع اطلاعاتی

مهدی نان گیر^۱

۱- استادیار- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه تبریز - تبریز - ایران
nangir@tabrizu.ac.ir

چکیده: در این مقاله مسئله CEO با منبع باینری مورد بررسی قرار می‌گیرد و یک روش عملیاتی برای کدگذاری آن با پیچیدگی پیاده‌سازی قابل قبول ارائه می‌گردد. روش کدگذاری ارائه شده بر اساس چندی‌سازی باینری و ایده کدگذاری اسلپین-ولف (SW) می‌باشد. نشان داده شده است که شکافت منبع، روش کارآمد و مناسبی جهت دستیابی به نقاط غیر گوشه‌ای در ناحیه کران نرخ‌های قابل حصول مسئله SW است. با توسعه روش SW نقاط کران نظری نرخ-اعوجاج مسئله CEO قابل حصول می‌گردد. کدبرداری روش ارائه شده با استفاده از الگوریتم‌های تکراری انتشار پیام می‌باشد که برای مسئله واینر-زیو (WZ) بکار می‌روند. در این مقاله نشان داده شده است که با بهره‌برداری از الگوریتم‌های تکراری انتشار پیام می‌توانیم به نقاط غیر گوشه‌ای کران درونی نرخ-اعوجاج برگر-تونگ برای مسئله CEO دست یابیم.

واژه‌های کلیدی: چندی‌سازی باینری، شکافت منبع، کران نظری برگر-تونگ، مسئله CEO باینری، مسئله SW

نوع مقاله: پژوهشی

DOI: 10.52547/jiaeee.20.3.81

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۱۲

تاریخ پذیرش مشروط مقاله: ۱۴۰۱/۰۲/۰۳

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۱۲

نام نویسنده‌ی مسئول: دکتر مهدی نان گیر

نشانی نویسنده‌ی مسئول: ایران - تبریز - بلوار ۲۹ بهمن - دانشگاه تبریز - دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر.

۱- مقدمه

در شبکه‌های حسگر بی‌سیم (WSN)، چندین مشاهده از یک پدیده قابل اندازه‌گیری به وسیله حسگرها در یک محیط آلوده به نوبت توسط یک پردازنده مرکزی جمع‌آوری و پردازش می‌شوند. برای بهره‌برداری بهتر از شبکه، حسگرها مشاهدات خود را کدگذاری می‌کنند و سپس به پردازنده مرکزی ارسال می‌کنند. پردازنده مرکزی پدیده‌ی مشترک اندازه‌گیری شده را کدبرداری و آشکارسازی می‌کند. این سناریوی توصیف شده می‌تواند به خوبی با مسئله معروف CEO^۱ در نظریه اطلاعات شبکه مدل شود [۱]. اگر فرض شود الفبای منبع اطلاعاتی و پارامتر اندازه‌گیری شده باینری باشد، در آن صورت مسئله، CEO باینری نامیده می‌شود، که تمرکز این مقاله روی آن است. ساختار مسئله CEO باینری با دو پیوند در شکل ۱ ارائه شده است.

کارهای تحقیقاتی در زمینه شبکه‌های اطلاعاتی چند کاربره را می‌توان به دو دسته تقسیم‌بندی کرد: در دسته اول، هدف، پیدا کردن کران‌های نظری برای سنجش عملکرد شبکه است، که در مسائل کدگذاری منابع اطلاعاتی، این عملکرد با کمیت‌های نرخ و اعوجاج سنجیده می‌شود. در دسته دوم، هدف طراحی کدهای عملیاتی دنبال می‌شود و با استفاده از کران‌های نظری موجود عملکرد طرح سنجیده می‌شود، که کار این مقاله در این دسته قرار می‌گیرد. اغلب کارهای تحقیقاتی که در دسته دوم قرار می‌گیرند، روی مسئله گوسی تربیعی CEO تمرکز دارند که در آنها منبع و نویزها مدل گوسی دارند [۲-۴]. در این مقاله یک روش کدگذاری پی‌درپی، مبتنی بر ایده شکافت منبع برای مسئله CEO باینری ارائه می‌دهیم [۵]. به طور کلی نشان داده می‌شود با استفاده از ایده شکافت منبع یک نقطه دلخواه در ناحیه L بعدی قابل حصول نرخ-اعوجاج به یک نقطه گوشه‌ای در ناحیه $L=2$ بعدی تبدیل می‌شود [۵]. چون در این کار $L=2$ است، بنابراین مسئله ما، حصول نقاط گوشه‌ای در فضای سه بعدی خواهد بود.

در طرح ارائه شده از الگوریتم‌های تکراری انتشار پیام استفاده می‌شود و آنها را روی کدهای مبتنی بر گراف و کم چگال پیاده‌سازی می‌کنیم. بدین ترتیب پیچیدگی طرح ارائه شده پایین و از نظر زمان به صرفه خواهد بود. در این کار از الگوریتم‌های انتشار بایاس (Bias-Propagation) [۶] و جمع-ضرب (Sum-Product) [۷] به ترتیب برای چندی‌سازی باینری و کدبرداری کانال در حضور اطلاعات جانبی استفاده می‌شود و نشان می‌دهیم که عملکرد نرخ-اعوجاج طرح ارائه شده به کران نظری برگر-تونگ نزدیک است.

یک روش دیگری که برای کدگذاری مسئله CEO مطرح می‌شود کدگذاری توام می‌باشد که برای حالت تعداد پیوند بالا، پیچیدگی زیادی دارد. مقایسه عملکرد نرخ-اعوجاج روش کدگذاری پی در پی و کدگذاری توام برای مسئله CEO باینری در [۸] صورت گرفته است. در این مقاله در حالت کلی روش پی در پی در پیاده‌سازی عملیاتی توصیه می‌شود. مسئله CEO در سمت گیرنده ارتباط تنگاتنگی با

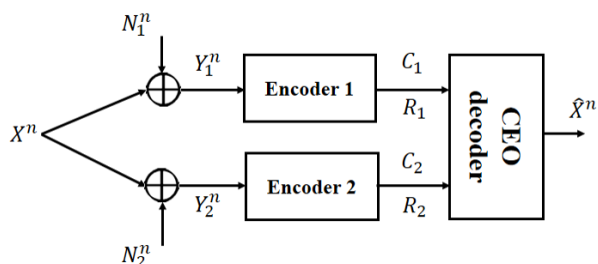
گیرنده کانال دسترسی چندگانه دارد که کران نظری و کدگذاری آن از موضوعات و زمینه‌های تحقیقاتی مورد علاقه پژوهشگران می‌باشد. در [۹] یک روش کدگذاری توام با استفاده از کدهای LDPC برای کانال دسترسی چندگانه ارائه شده است.

یک روش کدگذاری توام منبع-کانال برای کانال دسترسی چندگانه در حالت که نویز کانال گوسی فرض می‌شود در [۱۰] ارائه شده است که در آن از روش شبکه‌های عصبی عمیق برای یادگیری کدگذار و کدبردار استفاده می‌گردد. این روش اگر با روش‌های فشرده سازی منبع همچون کدهای LDGM ادغام شود، یک راه حل عملیاتی برای مسئله CEO فراهم می‌کند.

از آنجایی که کدهای LDPC دارای قابلیت‌های زیادی در کدگذاری سناریوهای سیستم‌ها و شبکه‌های مخابراتی دارند و مسئله CEO یک مسئله شبکه‌ای می‌باشد، بطور غیر مستقیم این کدها در حل مسئله CEO می‌توانند نقش داشته باشند. در مقاله [۱۱] کدهای LDPC در کدگذاری کانال رله مخابراتی مورد استفاده قرار می‌گیرند و عملکرد نزدیک به کران نظری دارند. مسئله CEO را می‌توان اتصال موازی چند کانال رله بهم در نظر گرفت که راه حل دیگری برای کدگذاری مسئله خواهد بود.

از سوی دیگر مسئله CEO را می‌توان یک مسئله کدگذاری منبع با چند ورودی و چند خروجی در نظر گرفت. همچنین معیارهای مختلفی می‌توان برای سنجش اعوجاج و تحلیل عملکرد داشت که در حالات مجانبی این معیارها می‌توانند به همدیگر همگرا باشند. مطالعه جامعی از این مباحث را در رساله [۱۲] می‌بینیم.

ساختار این مقاله بدین گونه است که در بخش ۲، مقدمات، تعریف مسئله CEO باینری، ملزومات و کران‌های موجود معرفی می‌گردند. در بخش ۳، طرح ارائه شده، هم در طرف کدگذار و هم طرف کدبردار تشریح می‌گردد و همزمان عملکرد آن تحلیل می‌شود. در بخش ۴ نتایج عددی و شبیه‌سازی گزارش می‌شوند، و در نهایت بخش ۵ به نتیجه‌گیری و جمع‌بندی کار مقاله می‌پردازد.



شکل (۱): مسئله CEO با دو پیوند و دو مشاهده

۲- مسئله CEO باینری و کران نظری نرخ-

اعوجاج آن

۲-۱- تعریف مسئله CEO باینری و کران موجود

همانطور که در شکل ۱ دیده می‌شود، دنباله باینری X^n توسط یک منبع باینری متقارن تولید می‌شود. این دنباله بعد از جمع شدن

با نویزهای باینری $(Y_i^n \sim \text{Ber}(p_i))$ ، مشاهدات باینری Y_i^n را تولید می‌کند که توسط کدگذار پیوند مربوطه به کلمه کد C_i نگاشسته می‌شود. نرخ فشرده سازی و اعوجاج را در لینک i به ترتیب D_i و R_i در نظر می‌گیریم. در کلی‌ترین حالت مسئله، ناحیه نرخ-اعوجاج قابل حصول برای مسئله CEO حتی در حالت دو پیوندی یک مسئله حل نشده است. در حالتی که معیار سنجش اعوجاج، متوسط فاصله همینگ باشد کران‌های درونی و بیرونی برای ناحیه نرخ-اعوجاج مسئله CEO باینری در حالت دو پیوندی به ترتیب به صورت زیر محاسبه شده اند [۱۳]:

$$\begin{aligned} R_1^i &\geq H_b(\rho * D_1 * D_2) - H_b(D_1), \\ R_2^i &\geq H_b(\rho * D_1 * D_2) - H_b(D_2), \end{aligned} \quad (۱)$$

$$R_1^i + R_2^i \geq 1 + H_b(\rho * D_1 * D_2) - \sum_{j=1}^2 H_b(D_j),$$

$$\begin{aligned} R_1^o(D_1) &\geq H_b[\rho * H_b^{-1}(1 - R_2^o(D_2))] - H_b(D_1), \\ R_2^o(D_2) &\geq H_b[\rho * H_b^{-1}(1 - R_1^o(D_1))] - H_b(D_2), \\ \sum_{j=1}^2 R_j^o(D_j) &\geq 1 + H_b(\rho) - \sum_{j=1}^2 H_b(D_j), \end{aligned}$$

(۲)

که در (۱) و (۲)، $H_b(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$ ، تابع آنتروپی باینری و $\rho = p_1 * p_2 = p_1(1-p_2) + (1-p_1)p_2$ می‌باشد.

۲-۲- چندی سازی باینری منبع

در کدگذاری منابع اطلاعاتی و نظریه نرخ-اعوجاج، روش‌ها و الگوریتم‌های موجود به دو دسته بدون اتلاف و با اتلاف طبقه‌بندی می‌شود. پر واضح است با مجاز دانستن میزانی از اعوجاج می‌توان به فشرده سازی بیشتری رسید و نرخ فشرده سازی را کاست. در سناریوی CEO که از دسته فشرده سازی با اتلاف است، مقادیر اعوجاج D_1 و D_2 در سمت فرستنده و از کدبردارها ناشی می‌شوند. در چندی سازی باینری یک دنباله n بیتی به یک دنباله n بیتی دیگری که کلمه کد است نگاشته می‌شود، به نحوی که متوسط فاصله همینگ بین دنباله‌ها و کلمات کد به حداقل مقدار خود برسد. کران نظری نرخ-اعوجاج در چندی سازی باینری طبق رابطه $R(D) = 1 - H_b(D)$ می‌باشد. ثابت می‌شود با استفاده از کدهای LDGM و الگوریتم‌های تکراری انتشار پیام همچون انتشار بایاس [۱۴] یا انتشار بررسی [۱۵]، این کران قابل حصول است. توجه کنیم از آنجایی که در عمل طول کدهایی که استفاده می‌شود محدود هستند، همواره مقداری فاصله از کران نظری وجود خواهد داشت.

در الگوریتم انتشار بایاس با استفاده از یک کد LDGM، هر دنباله n بیتی به یک کلمه کد n بیتی LDGM نگاشته می‌شوند. این

نگاشت به صورت تکراری و طی مراحل که کلمه کد بروز رسانی می‌شود، صورت می‌پذیرد که در نهایت، هدف، کمینه سازی اعوجاج فاصله همینگ بین دنباله منبع و کلمه کد اختصاص یافته می‌باشد. ثابت می‌شود کدهای LDGM قابلیت رسیدن به کران نظری نرخ-اعوجاج منبع باینری متقارن را دارند [۱۶]. کدهای فشرده ساز منابع اطلاعاتی کاربردهای گسترده ای در صنایع الکترونیک و مخابرات دارند [۱۷-۱۸].

۳-۲- مسئله WZ و کدگذاری در حضور اطلاعات جانبی

مسئله کدگذاری WZ، یک مسئله کدگذاری منبع در حضور اطلاعات جانبی یا کمکی می‌باشد [۱۴]. اطلاعات جانبی که کمک می‌کنند کدگذاری با اعوجاج کمتر و نرخ فشرده سازی بیشتر انجام شود، می‌تواند در کدگذار یا کدبردار یا هر دو حضور داشته باشد. در حالت مرسوم آن فقط در سمت کدبردار حضور دارد که همان مسئله WZ خواهد بود. در این حالت، کران نرخ-اعوجاج منبع باینری متقارن با اعوجاج فاصله همینگ به صورت زیر تغییر می‌یابد و کمتر از نرخ فشرده سازی حالت بدون اطلاعات جانبی خواهد بود:

$$R(D) = \text{lce}\{H_b(D * p) - H_b(D), (p, 0)\}. \quad (۳)$$

در (۳)، lce نشانگر پوش محدب دو منحنی از پایین است [۱۴]، و p پارامتر مدل اطلاعات جانبی است.

با استفاده از ایده و روش شکافت منبع می‌توان حصول یک نقطه دخواه در ناحیه نرخ-اعوجاج یک مسئله L پیوندی را به حصول یک نقطه گوشه‌ای در فضای $2L-1$ بعدی تبدیل کرد. از آنجایی که نقاط گوشه‌ای کران با ایده کدگذاری WZ پی‌درپی قابل حصول هستند [۱۹]، می‌توان نتیجه گرفت با این روش همه نقاط ناحیه نرخ-اعوجاج مسئله L بعدی قابل حصول هستند.

شکافت دنباله باینری موجود در هر پیوند به روش‌های مختلفی می‌تواند انجام شود. در روش پی‌درپی اطلاعات $L-1$ پیوند به $2L-2$ پیوند تفکیک می‌شوند و با یک لینک باقیمانده در کل $2L-1$ پیوند حاصل می‌شود که نقاط ناحیه کران آن قابل حصول هستند. از این ایده در طرح پیشنهادی استفاده می‌شود که جزئیات بیشتر آن در بخش بعدی ارائه می‌گردد.

۳- طرح کد عملیاتی ارائه شده

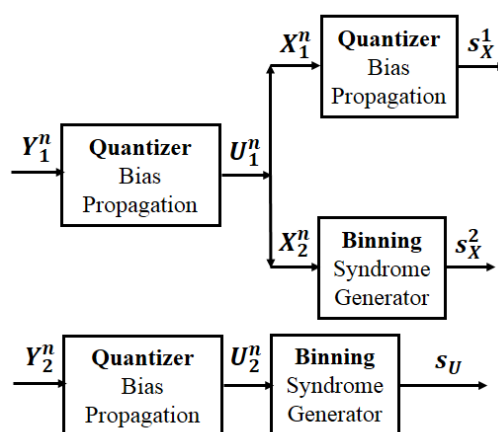
در این بخش طرح پیشنهادی برای کدگذاری و کدبردار مسئله CEO باینری به صورت مجزا از هم ارائه می‌شود. برای سادگی مسئله CEO دو پیوندی در نظر گرفته می‌شود ($L=2$). این روش پیشنهادی به سادگی قابل تعمیم برای مقادیر بزرگتر L می‌باشد.

۳-۱- کدگذاری

مراحل طرح کدگذاری برای حالت دو پیوندی با جزئیات در شکل ۲ دیده می شود. ابتدا در هر دو پیوند چندی سازی باینری توسط کدهای LDGM انجام می شود و سپس کلمات کد U_1^n و U_2^n با نرخ و اعوجاج قابل اندازه گیری تولید می شوند. در پیوند اول، U_1^n پس از شکافت، به دنباله های X_1^n و X_2^n با ضابطه زیر تبدیل می شوند:

$$\begin{aligned} X_1^n &= \min(U_1^n, T), \\ X_2^n &= \max(U_1^n, T) - T, \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن T یک دنباله باینری n بیتی دلخواه است. محاسبه کمینه و بیشینه در رابطه (۴) بر اساس مقدار معادل ددهی می باشد. به وضوح داریم $X_1^n + X_2^n = U_1^n$ و بنابراین تناظر یک به یک بین U_1^n و (X_1^n, X_2^n) برقرار است. این تناظر یک به یک برای شکافت لازم است. متوسط فاصله همینگ بین U_1^n و X_j^n را با α_j در نشان می دهیم ($j \in \{1, 2\}$) که با استفاده از ضابطه شکافت منبع محاسبه می شوند.



شکل (۲): طرح کدگذاری مسئله CEO باینری دو پیوندی

در گام بعدی، کدگذاری SW را داریم که در آن دنباله فشرده شده S_X^1 حاصل از چندی سازی باینری X_1^n با الگوریتم انتشار بایاس توسط یک کد LDGM به دست می آید. همچنین دنباله های فشرده شده S_X^2 و S_U را به ترتیب از بین گذاری U_2^n و U_1^n توسط کدهای LDPC به دست آورده و همراه با S_X^1 به سمت کدبردار ارسال می کنیم. بین گذاری ها با ضابطه های زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} S_X^2 &= X_2^n H_X^T, \\ S_U &= U_2^n H_U^T, \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن H_X و H_U ماتریس های بررسی توازن دو کد LDPC می باشند. محاسبات نرخ و اعوجاج که در ادامه صورت می گیرد مبنای سنجش عملکرد طرح ارائه شده می باشد. در چندی سازی باینری داریم:

$$\begin{aligned} R_{j1} &= \frac{k_j}{n} = 1 - H_b(d_{j1}) + \varepsilon_{j1}, \\ d_{j1} &= E \left[\frac{1}{n} (d_{\text{Ham}}(Y_j^n, U_j^n)) \right], \quad j=1, 2, \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن $d_{\text{Ham}}(.,.)$ تابع فاصله همینگ بین دو دنباله است. همچنین نرخ فشرده سازی در پیوندهای اول و دوم به شرح زیر می باشد:

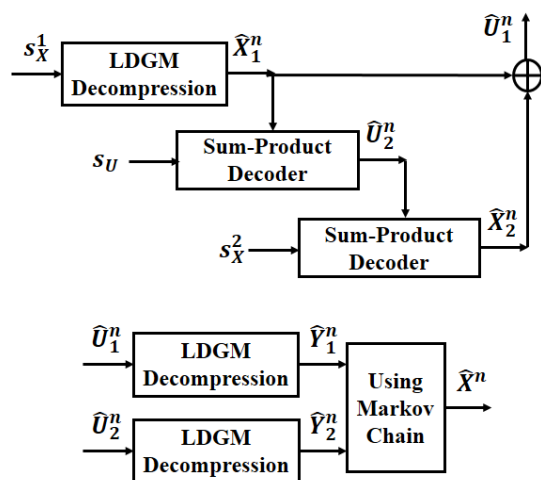
$$R_1 = \frac{k_x^1 + k_x^2}{n}, \quad R_2 = \frac{k_u}{n}, \quad (7)$$

که در آن k_x^1, k_x^2 و k_u به ترتیب طول دنباله های S_X^1, S_X^2 و S_U هستند.

با استفاده از ایده شکافت منبع مشاهده می گردد که مسئله CEO دو پیوندی به یک مسئله معادل سه پیوندی تبدیل می شود، که با روش کدبرداری پی در پی می توانیم اطلاعات منبع باینری اصلی یعنی X^n را بازسازی کنیم. در ادامه جزئیات مراحل کدبرداری بیان می شود.

۳-۲- کدبرداری

همانطور که بیان شد، سه دنباله فشرده شده با اتلاف S_X^1, S_X^2 و S_U به سمت کدبردار ارسال می شوند تا طی مراحل کدبرداری، منبع باینری اصلی X^n کدبرداری و آشکارسازی شود. در شکل ۳ جزئیات مراحل انجام کدبرداری نشان داده شده است.



شکل (۳): طرح برداری ارائه شده برای مسئله CEO باینری دو پیوندی

اندیس‌های متناظر با \hat{U}_1^n و \hat{U}_2^n در ماتریس مولد کد LDGM استفاده شده در سمت فرستنده محقق می‌شود.

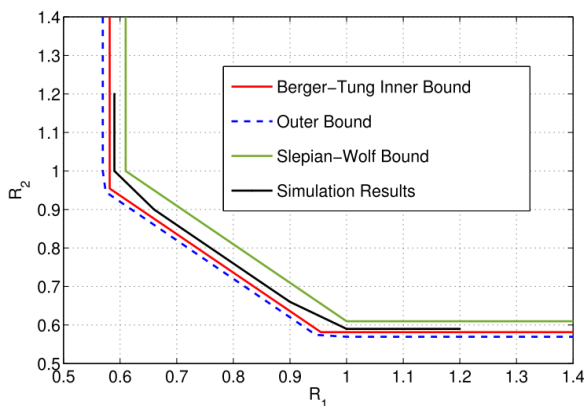
در نهایت با استفاده از زنجیره مارکوف بین مشاهدات نویزی و

منبع باینری اصلی که به صورت $Y_1^n \xleftrightarrow{p_1} X^n \xleftrightarrow{p_2} Y_2^n$ است، می‌توان منبع اصلی را بازسازی کرد. دنباله باینری به طول n که متوسط فاصله همینگ آن با \hat{Y}_1^n و \hat{Y}_2^n به ترتیب برابر با p_1 و p_2 باشد، به دست آمده و دنباله \hat{X}^n تولید می‌کند.

آنچه در اینجا شرح داده شد، توصیف کاملی از مراحل انجام کدگذاری و کدبرداری مسئله CEO باینری دو پیوندی بود که در پیاده‌سازی هم دقیقاً همین روند گام به گام انجام می‌شود. در بخش بعد نتایج عددی حاصل از شبیه‌سازی و پیاده‌سازی را گزارش می‌کنیم و عملکرد طرح پیشنهادی را به لحاظ فاصله نمودار نرخ-اعوجاج از کران‌های نظری موجود مورد بررسی می‌دهیم.

۴- نتایج شبیه‌سازی و بحث

در این بخش نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی و شبیه‌سازی طرح ارائه شده، گزارش می‌شوند. همانطور که بیان شد الگوریتم انتشار بایاس روی کدهای LDGM و الگوریتم جمع-ضرب روی کدهای LDPC اعمال و پیاده‌سازی می‌شوند. توزیع درجات کدهای استفاده شده از [۲۰] و [۲۱] انتخاب می‌شوند. این کدها برای کانال باینری متقارن با روش DE^۲ بهینه شده‌اند [۲۲]. در تولید ماتریس‌های کم چگال هم از روش PEG^۳ استفاده می‌شود. پارامترهای نویز مشاهدات را $(p_1, p_2) = (0.0625, 0.1)$ فرض می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت $\rho = p_1 * p_2 = 0.15$. همچنین منبع اصلی در مسئله CEO باینری متقارن هست و طول کد را $n = 10^4$ در نظر می‌گیریم. برای مقادیر اعوجاج $D_1 = D_2 = 0.005$ کران‌های نظری درونی و بیرونی روابط (۱) و (۲) که در [۸] به دست آمده است در شکل ۴ نشان داده شده‌اند.



شکل (۴): عملکرد نرخ-اعوجاج طرح ارائه شده در مقایسه با کران‌های نظری

در ابتدا دنباله فشرده شده‌ی s_X^1 توسط همان کد LDGM استفاده شده در سمت کدگذار، کدبرداری می‌شود و \hat{X}_1^n به دست می‌آید که یک کلمه کد LDGM خواهد بود. نرخ و اعوجاج این مرحله را به ترتیب R_s و D_s فرض می‌کنیم. در اصل، این مرحله ضرب شدن دنباله ورودی در ماتریس مولد کد LDGM می‌باشد که کلمه کد خروجی حاصل می‌شود. سپس \hat{X}_1^n به عنوان اطلاعات جانبی در کدبردار جمع-ضرب اول با ورودی سندروم s_U مورد استفاده قرار می‌گیرد تا \hat{U}_2^n آشکارسازی شود. با توجه به رابطه ظرفیت کانال باینری متقارن، نرخ کد LDPC استفاده شده در این الگوریتم برای کدبرداری با خطای ناچیز برابر است با:

$$\frac{n-k_u}{n} = 1 - H_b(d_{11} * \rho * d_{21} * \alpha_1) - \varepsilon_{22}, \quad (8)$$

که در آن ε_{22} عدد مثبت بسیار کوچکی است که باعث می‌شود نرخ کد LDPC از ظرفیت کانال باینری متقارن مجازی دیده شده در زنجیره مارکوف از U_2^n تا X_1^n کوچکتر باشد. مطابق قضیه شانون، وجود همچنین کدی همراه با امکان کدبرداری با احتمال خطای ناچیز تضمین شده است.

به طور مشابه، دنباله \hat{U}_2^n به عنوان اطلاعات جانبی در کدبردار جمع-ضرب دوم با ورودی سندروم s_X^2 مورد استفاده قرار می‌گیرد و \hat{X}_2^n آشکارسازی می‌شود. نرخ کد LDPC استفاده شده در این الگوریتم برای کدبرداری با خطای قابل اغماض به صورت زیر است:

$$\frac{n-k_x}{n} = 1 - H_b(d_{11} * \rho * d_{21} * \alpha_2) - \varepsilon_{12}, \quad (9)$$

که در آن ε_{12} عدد مثبت بسیار کوچکی است که باعث می‌شود نرخ کد LDPC از ظرفیت کانال باینری متقارن مجازی دیده شده در زنجیره مارکوف از X_2^n تا U_2^n کوچکتر شود و طبق قضیه شانون وجود کد و امکان کدبرداری با احتمال خطای ناچیز تضمین می‌شود. با جمع کردن \hat{X}_1^n و \hat{X}_2^n ، دنباله \hat{U}_1^n به دست می‌آید. فرض کنیم خطای کدبرداری U_1^n و U_2^n به ترتیب BER_1 و BER_2 باشد، به بیان دیگر متوسط فاصله همینگ بین U_1^n و \hat{U}_1^n برابر با BER_1 و متوسط فاصله همینگ بین U_2^n و \hat{U}_2^n برابر با BER_2 است. برای اعوجاج کلی در پیوندها رابطه زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$D_j = d_{j1} * BER_j; \quad j = 1, 2. \quad (10)$$

در مرحله بعدی کدبرداری، می‌توان با همان کدهای LDGM استفاده شده در چندبازی باینری هر پیوند، مشاهدات \hat{Y}_1^n و \hat{Y}_2^n را از روی \hat{U}_1^n و \hat{U}_2^n به دست آورد، که در واقع با ضرب شدن

یک دنباله باینری خاص مثل U_1^n فاصله همینگ k داشته باشند برابر است با $\binom{n}{k}$ ، که به طور متوسط نصف آنها معادل دهمی بزرگتر از T دارند، و بقیه کوچکتر از T هستند. علاوه بر این، مجموع وزن همینگ همه دنباله‌های باینری به طول n برابر است با $n \times 2^{n-1}$. با استفاده از این دو نکته، مقدار تقریبی پارامتر α_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha_1 \approx \frac{\frac{1}{2} \left[\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + k \binom{n}{k} \right]}{n \times 2^{n-1}}, \quad (13)$$

که در آن عدد طبیعی k طوری انتخاب می‌شود که تقریب زیر برقرار باشد:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{k} \approx 2^n - (T+1). \quad (14)$$

رابطه (14) تعداد اعداد باینری n تایی که معادل دهمی آنها از مقدار T بزرگتر هست را نشان می‌دهد.

با استفاده از برابری $i \binom{n}{i} = n \binom{n-1}{i-1}$ و رابطه (13)، برای پارامتر α_1 عبارت معادل زیر به دست می‌آید:

$$\alpha_1 \approx \frac{\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n-1}{k-1}}{2^n}.$$

(15)

با اعمال دو تغییر متغیر $N = n-1$ و $K = k-1$ ، نمایش فشرده زیر بدست می‌آید:

$$2\alpha_1 \approx \sum_{i=0}^K \binom{N}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{N-i}. \quad (16)$$

حال از تقریب گوسی زیر استفاده می‌شود،

$$\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(i-np)^2}{2np(1-p)}}, \quad (17)$$

و تقریب زیر نتیجه می‌شود [23]:

$$\sum_{i=0}^K \binom{N}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{N-i} \approx G\left(\frac{K-0.5N}{0.5\sqrt{N}}\right), \quad (18)$$

نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی طرح تا ۳ رقم اعشار در جدول ۱ نمایش داده شده است. در نقاط گوشه‌ای، مسئله CEO باینری به مسئله WZ باینری تبدیل می‌شود، که در آن حالت یکی از پیوندها بدون اتلاف فشرده و ارسال می‌شود (کد ۳). اگر جای دو پیوند را با هم عوض کنیم، به بیان دیگر اگر شکافت منبع را در پیوند دوم انجام دهیم، با استفاده از تقارن موجود در مسئله، نقطه مقارنی در نرخ و اعوجاج حاصل خواهد شد، که در نتایج ترسیم شده در شکل ۴، در نظر گرفته شده‌اند. از این رو نقاط $(R_1, R_2) = (0.85, 0.71)$ ، $(R_1, R_2) = (0.9, 0.66)$ و $(R_1, R_2) = (1, 0.59)$ با مقادیر اعوجاج ارائه شده در جدول ۱ قابل حصول هستند. این نتایج همراه با کران مسئله SW که در واقع حالت بدون اتلاف $D_1 = D_2 = 0$ است، در شکل ۴ با رنگ سبز نشان داده شده است.

مشاهده می‌شود وجود اعوجاج همینگ و با اتلاف بودن باعث می‌شود کران مسئله SW و مسئله CEO روی هم قرار نگیرند و بین آنها فاصله ایجاد شود. این مشاهده به طور کلی برای هر کران نظری که برای مسئله CEO ارائه می‌شود، صادق است. عملکرد هر کد عملیاتی طراحی شده به نوبه خود یک کران درونی برای مسئله ارائه می‌دهد، که هر چقدر نزدیکتر به کران واقعی باشد، آن کد کارتر است. بدیهی است کران واقعی، بین کران بیرونی و درونی قرار می‌گیرد. احتمال خطای گزارش شده در جدول ۱، و همچنین نزدیک بودن عملکرد طرح ارائه شده به کران برگ-تونگ، نشانگر کارایی آن است.

در پیاده‌سازی طرح، محاسبه پارامترهای α_1 و α_2 از اهمیت بالایی برخوردار هستند. این دو پارامتر به ترتیب متوسط فاصله همینگ بین U_1^n با X_1^n و X_2^n می‌باشد. در اینجا α_1 به طور تقریبی محاسبه می‌شود. برای مثال چند حالات خاص زیر را در نظر بگیرد:

$$\begin{aligned} T=0 &\Rightarrow \alpha_1=0.5, \\ T=2^{n-1} &\Rightarrow \alpha_1=0.25, \\ T=2^n-1 &\Rightarrow \alpha_1=0. \end{aligned} \quad (11)$$

از آنجایی که U_1^n می‌تواند همه دنباله‌های باینری به طول n باشد، دو حالت کلی می‌تواند برای معادل دهمی این دنباله اتفاق بیفتد که در زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} U_1^n \leq T &\Rightarrow X_1^n = U_1^n \Rightarrow d_{\text{Ham}}(X_1^n, U_1^n) = 0, \\ U_1^n > T &\Rightarrow X_1^n = T \Rightarrow d_{\text{Ham}}(X_1^n, U_1^n) \neq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (12) می‌توان بیان کرد که α_1 متوسط مقدار فاصله همینگ $d_{\text{Ham}}(X_1^n, U_1^n)$ می‌باشد و این متوسط گیری روی همه مقادیر U_1^n که معادل دهمی آنها از T بزرگتر هست، گرفته می‌شود. تعداد رشته‌های باینری n تایی که با

که در آن $G(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. بنابراین، مقدار α_1 از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\alpha_1 \approx \frac{1}{2} G\left(\frac{K - 0.5N}{0.5\sqrt{N}}\right). \quad (19)$$

نتایج و دست‌آوردهای کار پژوهشی این مقاله را می‌توان به صورت زیر جمع بندی کرد:

۱- از آنجایی که طرح ارائه شده برای کدگذاری و کدبرداری مسئله CEO، مرکب از کدهای منبع و کانال هستند که هر کدام قابلیت حصول کران‌های نظری را دارند، می‌توان نتیجه گرفت طرح ارائه شده قابلیت حصول کران نظری درونی مسئله CEO باینری تحت معیار اعوجاج همینگ را دارد. توجه شود که کران نظری نرخ-اعوجاج مسئله CEO قابل تبدیل و به اصطلاح قابل شکستن به مسائل کدگذاری منبع و کانال هست.

۲- در پیاده‌سازی طرح، از الگوریتم‌های تکراری انتشار پیام استفاده می‌شود. با افزایش طول کد n و همچنین افزایش تعداد دفعات تکرار الگوریتم عملکرد آن بهتر و نزدیکتر به کران نظری می‌شود. این الگوریتم‌ها پیچیدگی پایینی دارند و می‌توانند در کاربردهای عملی به صورت سخت‌افزاری پیاده‌سازی شوند.

۳- ضابطه شکافت منبع در سمت کدگذار از تنوع بالایی برخوردار است. در نتیجه کدبردارهای متنوعی برای مسئله CEO به صورت پی‌درپی خواهیم داشت که نسبت به روش‌های کدبرداری توام پیچیدگی کمتری دارند.

۴- طرح کد ارائه شده در این مقاله در همه مراحل و گام‌ها با استفاده از معیار اعوجاج همینگ قابل ارزیابی است، که از مزایای طرح می‌باشد. از آنجایی که این اعوجاج برای منابع اطلاعاتی در دنیای واقعی همچون صوت، تصویر یا داده پر کاربردترین معیار هست، این طرح در عمل کارا و تحقق‌پذیر خواهد بود.

۵- نتیجه‌گیری

یک طرح کدگذاری با پیچیدگی پایین برای مسئله CEO باینری دو پیوندی با فرض معیار اعوجاج فاصله همینگ در این مقاله ارائه می‌شود. این طرح بر اساس چندی‌سازی باینری و با استفاده از کدهای کم چگال LDGM و روش شکافت منبع می‌باشد که باعث می‌شود دست‌یابی به یک نقطه دلخواه از ناحیه نرخ-اعوجاج قابل حصول با دست‌یابی به یک نقطه گوشه‌ای در ناحیه نرخ-اعوجاج قابل حصول مسئله CEO سه پیوندی معادل سازی شود. کدبرداری در نقاط

گوشه‌ای با پیچیدگی پایین و با استفاده از روش آشکارسازی پی‌درپی عملیاتی می‌شود. با انتخاب کدهای مبتنی بر گراف با توزیع درجات و طول مناسب نشان دادیم طرح کدگذاری و کدبرداری ارائه شده می‌تواند عملکرد بسیار نزدیکی به کران‌های نظری نرخ-اعوجاج مسئله CEO باینری دو پیوندی داشته باشد. یک مزیت مهم طرح ارائه شده این است که این روش قابلیت توسعه و تعمیم به مسئله CEO با ابعاد بالاتر و همچنین برای سایر معیارهای اندازه‌گیری اعوجاج را دارد، که می‌تواند در ادامه این کار پیشنهاد شود.

مراجع

- [1] A. El Gamal and Y.-H. Kim, Network information theory. Cambridge university press, 2011.
- [2] Y. Yang, V. Stankovic, Z. Xiong, and W. Zhao, "On multiterminal source code design," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 54, no. 5, pp. 2278–2302, May 2008.
- [3] J. Chen and T. Berger, "Successive wyner-ziv coding scheme and its application to the quadratic gaussian CEO problem," IEEE Transactions on Information Theory, vol. 54, no. 4, pp. 1586–1603, April 2008.
- [4] H. Behroozi and M. R. Soleymani, "Distortion sum-rate performance of successive coding strategy in quadratic gaussian CEO problem," IEEE Transactions on Wireless Communications, vol. 6, no. 12, pp. 4361–4365, December 2007.
- [5] B. Rimoldi and R. Urbanke, "Asynchronous slepian-wolf coding via source-splitting," in Information Theory. 1997. Proceedings., 1997 IEEE International Symposium on, Jun 1997, p. 271.
- [6] T. Filler and J. Fridrich, "Binary quantization using belief propagation with decimation over factor graphs of LDGM codes," in Allerton Conference on Control, Computing, and Communication, September 2007.
- [7] A. D. Liveris, Z. Xiong, and C. N. Georgiades, "Compression of binary sources with side information at the decoder using LDPC codes," IEEE Communications Letters, vol. 6, no. 10, pp. 440–442, Oct 2002.
- [8] Nangir, Mahdi, et al. "Comparison Between the Joint and Successive Decoding Schemes for the Binary CEO Problem." 2020 28th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE). IEEE, 2020.
- [9] Nangir, Mahdi. "Reliability Analysis of the Joint LDPC Decoding Algorithms over the Multiple Access Channels." Journal of Information Systems and Telecommunication (JIST) 5.36 (2021): 33.
- [10] Saidutta, Yashas Malur, Afshin Abdi, and Faramarz Fekri. "Analog Joint Source-Channel Coding for Distributed Functional Compression using Deep Neural Networks." 2021 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). IEEE, 2021.
- [11] Zribi, Amin, Shulin Song, and Tad Matsumoto. "LDPC-based multi-relay lossy forwarding for correlated source transmission over orthogonal Rayleigh fading channels." 2021 IEEE Conference on Antenna Measurements & Applications (CAMA). IEEE, 2021.
- [12] Li, Yanning. "On the Asymptotic Rate-Distortion Function of Multiterminal Source Coding Under Logarithmic Loss." PhD diss., 2021.

جدول (۱): نتایج عددی حاصل از پیاده سازی طرح کد ارائه شده از دید عملکرد نرخ-اعوجاج

کد	d_{11}	$\frac{k_1}{n}$	d_{21}	$\frac{k_2}{n}$	T	R_1	R_2	α_1	BER ₁	BER ₂	D_s	R_s	$\frac{k_x^1}{n}$	$\frac{k_x^2}{n}$
1	0.003	0.98	0.003	0.98	0.8×2^{k_1}	0.71	0.85	0.1	0.002	0.002	0.07	0.67	0.05	0.66
2	0.003	0.98	0.003	0.98	0.7×2^{k_1}	0.66	0.9	0.15	0.002	0.002	0.08	0.62	0.05	0.61
3	0.003	0.98	0	1	-	0.59	1	-	0.002	0	-	-	-	0.59

- [13] X. He, X. Zhou, P. Komulainen, M. Juntti, and T. Matsumoto, "A lower bound analysis of hamming distortion for a binary CEO problem with joint source-channel coding," IEEE Transactions on Communications, vol. 64, no. 1, pp. 343–353, Jan 2016.
- [14] Nangir, Mahdi, Mahmoud Ahmadian-Attari, and Reza Asvadi. "Binary Wyner-Ziv code design based on compound LDGM-LDPC structures." IET Communications 12.4 (2017): 375-383.
- [15] Braunstein, Alfredo, Marc Mézard, and Riccardo Zecchina. "Survey propagation: An algorithm for satisfiability." Random Structures & Algorithms 27.2 (2005): 201-226.
- [16] Golmohammadi, Ahmad, et al. "Encoding of spatially coupled LDGM codes for lossy source compression." IEEE Transactions on Communications 66.11 (2018): 5691-5703.
- [۱۷] آقا گل زاده علی، نوشیار مهدی، نامجو احسان. چند پخشی اطلاعات ویدئویی کدشده با H.264 در شبکه های ناهمگن مبتنی بر کدینگ منابع چند پایانه ای. نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران. ۱۳۸۸؛ ۶ (۲): ۴۱-۵۶.
- [۱۸] رضائی عارف، ضامنی مهسا، فرزین وش لیلی. ارائه روشی کارا برای پنهان نگاری بدون اتلاف و با ظرفیت جاسازی بالای تصاویر محرمانه. نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران. ۱۴۰۰؛ ۱۸ (۳): ۸۹-۱۰۰.
- [19] Nangir, Mahdi, et al. "Successive Wyner-Ziv Coding for the Binary CEO Problem under Logarithmic Loss." IEEE Transactions on Communications 67.11 (2019): 7512-7525.
- [20] D. H. Schonberg, "Practical distributed source coding and its application to the compression of encrypted data," Ph.D. dissertation, Univ. California, Berkeley, 2007.
- [21] T. Filler, "Minimizing embedding impact in steganography using low density codes," Master's thesis, SUNY Binghamton, Jul. 2007.
- [22] Richardson, Tom, and Ruediger Urbanke. Modern coding theory. Cambridge university press, 2008.
- [23] Papoulis, A., and Unnikrishna Pillai. "Probability, random variables and stochastic processes", fourth edition, 2002.

زیر نویس ها:

¹ Chief Executive Officer

² Lower Convex Envelop

³ Density Evolution

⁴ Progressive Edge Growth

^۵ این گزاره تقریبی است و برای n های بزرگتر تقریب دقیق تر می شود.