

بهبود هزینه ارتباطات در محاسبات کوانتومی توزیع شده چند افرازی

عاطفه تن زده پناه^۱ محبوبه هوشمند^۲ سید عابد حسینی^۳

۱- دانش آموخته کارشناسی ارشد، گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

atefehtanzadeh@gmail.com

۲- استادیار، گروه مهندسی کامپیوتر، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

houshmand@mshdiau.ac.ir

۳- استادیار، گروه مهندسی برق، واحد مشهد، دانشگاه آزاد اسلامی، مشهد، ایران

hosseyni@mshdiau.ac.ir

چکیده: به دلیل وجود موانع بسیار در پیاده سازی مدارهای کوانتومی در ابعاد بزرگ، سیستم های کوانتومی توزیع شده یک راه حل مناسب برای این نوع مدارها است. در این راستا کاهش تعداد مخابره از راه دور کوانتومی، به عنوان یک راه حل برای بهبود هزینه پیاده سازی سیستم های کوانتومی توزیع شده است. تعداد کمینه مخابره های از راه دور کوانتومی می تواند به عنوان معیاری برای سنجش بهره وری سیستم های کوانتومی توزیع شده مورد توجه قرار گیرد. در این مطالعه، به علت پیچیدگی مساله کاهش هزینه مخابرات از راه دور در محاسبات کوانتومی چندافرازی، بهینه سازی در دو سطح پیشنهاد می شود. در سطح اول، با استفاده از روش های افزایشی گراف، مدار کوانتومی به k بخش افرازی می شود. در سطح دوم، با استفاده از یک سری قوانین و توابع پیشنهادی، تعداد مخابره از راه دور برای مدار کوانتومی افرازی شده، بهبود داده می شود. در کارهای قبلی، برای مدارات کوانتومی توزیع شده چندافرازی، تنها بهینه سازی در سطح اول دیده شده است. نتایج اجرا نشان می دهد که هزینه مخابره از راه دور در الگوریتم پیشنهادی نسبت به کارهای قبلی بر روی مدارات محک بهبود یافته است.

واژه های کلیدی: محاسبات کوانتومی توزیع شده چند افرازی، مخابره از راه دور کوانتومی، بهینه سازی

نوع مقاله: پژوهشی

DOI: 10.52547/jiaeee.20.1.51

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۴/۱۷

تاریخ پذیرش مشروط مقاله: ۱۴۰۱/۰۵/۰۲

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۰۹

نام نویسنده ی مسئول: دکتر محبوبه هوشمند

نشانی نویسنده ی مسئول: ایران، مشهد، بلوار امامیه، خیابان استاد یوسفی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، دانشکده ی مهندسی

۱- مقدمه

به علت محدودیت در امکان پذیر بودن کوچک سازی بیشتر در فناوری CMOS [۱]، فناوری های جدیدی برای جایگزینی این فناوری پیشنهاد شده است که از جمله امیدوار کننده ترین آن ها فناوری کوانتومی است. در سال های اخیر، تحقیقات مربوط به محاسبات کوانتومی [۲] از مرحله نظری خالص، به مرحله اجرایی و مهندسی رسیده است. محاسبات کوانتومی از قوانین مکانیک کوانتومی برای طراحی کامپیوترهایی استفاده می کنند که در حل برخی از مسائل از بهترین الگوریتم های کلاسیک بهتر عمل می کنند و به سرعت از نتایج نظری به فناوری کوانتومی واقعی رشد یافته است. هرچند، پیاده سازی یک کامپیوتر کوانتومی موانع بسیاری دارد. یکی از این محدودیت ها، تعداد کیوبیت هایی است که می توانند برای ساخت یک دستگاه محاسبات کوانتومی یکپارچه استفاده شوند چون کیوبیت ها بعد از مدتی وضعیت خود را از دست می دهند [۳]. سیستم های کوانتومی توزیع شده راه حل مناسبی برای حل مساله محدودیت ظرفیت سیستم های کوانتومی است. اولین پیشنهاد های مدارهای کوانتومی توزیع شده به عنوان سیستمی با تعدادی مدار کوانتومی با ظرفیت کوچک توسط کلو و بهرم [۴]، کیراک و همکارانش [۵] و گراور [۶] معرفی شد. گراور [۶] سیستم کوانتومی توزیع شده ای را معرفی کرد که در آن چند بخش در مکان های جدا از هم مستقر هستند و بعد از انجام محاسبات خود را به صورت مجزا در صورت لزوم اطلاعات مورد نیاز را به ایستگاه پایگاه می فرستند. گراور نشان داد که با استفاده از این روش توزیع شده، زمان محاسبه کلی متناسب با تعداد ذرات توزیع شده است. بیلز و همکاران [۷] ثابت کردند که با استفاده از یک گراف ابرمکعب می توان هر مدار کوانتومی را از طریق یک مدار کوانتومی توزیع شده با گره های مرتبط همانند سازی کرد. ون میتر و همکاران [۸، ۹] در دو مقاله روش های پیاده سازی کامپیوترهای کوانتومی مقیاس پذیر را با استفاده از معماری چند رایانه ای با حافظه توزیع پذیر بررسی کردند.

در مقاله کالیفی و همکاران [۲]، سرعت محاسبه نمایی که می تواند با اتصال کامپیوترهای کوانتومی از طریق اینترنت کوانتومی حاصل شود، مورد بحث قرار گرفته است. در این مقاله، درهم تنیدگی به عنوان ابزاری مهم برای انتقال کیوبیت ها بدون نقص در اصل عدم کپی و اندازه گیری توصیف شده است. کاکیاپوتی و همکاران [۱۰] چالش ها و مشکلات طراحی اینترنت کوانتومی مورد بررسی قرار دادند. برای این منظور، ابتدا دانش اساسی در مورد مکانیک کوانتومی، که برای درک تفاوت های بین یک شبکه کلاسیک و شبکه کوانتومی لازم است، معرفی شده است. سپس انتقال کوانتومی را به عنوان استراتژی کلیدی برای انتقال اطلاعات کوانتومی بدون انتقال فیزیکی ذره ای که اطلاعات کوانتومی را ذخیره می کند، معرفی شده است. به علت قضیه عدم کپی برداری، انتقال مستقیم

اطلاعات کوانتومی از طریق فوتون نیست و باید از پروتکل مخابره از راه دور کوانتومی استفاده شود. در نهایت، چالش های اصلی تحقیق در طراحی شبکه های ارتباطی کوانتومی شرح داده شده است.

در مقاله زمردی و همکاران [۱۱] الگوریتمی برای بهینه سازی تعداد مخابره از راه دور کوانتومی های 'مورد نیاز در یک سیستم توزیع شده با دو افراز پیشنهاد شده است. در [۱۲] با استفاده از الگوریتم ژنتیک، زمان اجرای روش ارائه شده در آن مقاله بهبود یافته است.

آندرس مارتینس و همکاران مسئله کاهش افراز بندی مدارهای کوانتومی به افراز بندی گرافی را در [۱۳] مطرح کرده اند. نویسندگان آن مقاله، یک مدار کوانتومی را به یک آبرگراف نگاشت کردند و سپس از روش های موجود افراز بندی گراف برای افراز مدار کوانتومی استفاده کردند. البته این نویسندگان هیچ بهینه سازی را در خصوص جابجایی گیت ها و همچنین جستجوی افراز بندی های مختلف برای پیاده سازی گیت های سراسری انجام نداده و در نتیجه قادر به تولید جواب های بهینه نیستند.

در [۱۴] هزینه ارتباطات برای مدارهای کوانتومی توزیع شده چند افرازی کاهش یافته است. در این مقاله، بهینه سازی تنها در سطح یک دیده شده است و از الگوریتم Kernighan-Lin (K-L) [۱۵] بدین منظور استفاده شده است.

در [۱۶] یک روش برای توزیع مدارات کوانتومی با استفاده از افراز گراف ارائه شده است. در این روش، ابتدا مدار کوانتومی به یک گراف دو بخشی تبدیل می شود و سپس یک روش برنامه ریزی پویا، گراف دو بخشی را به تعداد دلخواه تقسیم می کند. هر چند در این روش، بهینه سازی های در سطح دو دیده نشده است و همچنین قید متوازن بودن افرازاها در نظر گرفته نشده است.

در [۱۷] یک روش خودکار مبتنی بر پنجره ارائه شده است. نویسندگان در آن مطالعه با استفاده از یک الگوریتم مبتنی بر برنامه ریزی خطی، مفاهیم مخابره از راه دور گیت و کیوبیت با یکدیگر ترکیب کرده اند تا هزینه ارتباطات را کمینه کنند.

در معماری سیستم های کوانتومی توزیع شده، تاکنون روش الگوریتمی و بهینه ای برای کاهش هزینه مخابره از راه دور در مدارات کوانتومی چند افرازی در پژوهش های موجود صورت نگرفته است و به دلیل هزینه بالای ارتباطات کوانتومی و مدار مخابره از راه دور، کاهش تعداد مدارهای مخابره از راه دور منجر به بهبود هزینه پیاده سازی یک مدار کوانتومی توزیع شده می گردد.

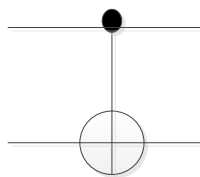
در این مقاله، روش ارائه شده در [۱۱] به طوری توسعه می یابد که بتواند تعداد مخابره از راه دور کوانتومی را برای مدارهای چند افرازی کاهش دهد.

در ادامه ای این مقاله، در بخش دوم مفاهیم اولیه مورد بررسی قرار می گیرد. در بخش سوم روش پیشنهادی و در بخش چهارم نتایج آمده

یک گیت مشهور دو کیوبیتی، گیت معکوس کننده کنترلی، CNOT است. کیوبیت اول، در نقش کنترل و کیوبیت دوم در نقش هدف است. اگر کیوبیت کنترل $|1\rangle$ باشد، CNOT، کیوبیت هدف را معکوس می کند و اگر کیوبیت کنترل $|0\rangle$ باشد، کیوبیت هدف بدون تغییر خارج می شود. نمایش ماتریسی گیت CNOT به صورت زیر است.

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

شکل ۱ نیز نمایش مداری گیت CNOT را نشان می دهد.



شکل (۱): نمایش مداری گیت CNOT

• درهم تنیدگی کوانتومی

درهم تنیدگی کوانتومی [۱۸] یک پدیده فیزیکی مهم در حوزه محاسبات کوانتومی است که نظیری در محاسبات کلاسیک ندارد. اگر یک حالت کوانتومی چند کیوبیتی $|\Phi\rangle$ را به صورت ضرب تانسوری $|\Phi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$ نتوان نوشت، آنگاه $|\Phi\rangle$ درهم تنیده است.

• اندازه گیری کوانتومی

اندازه گیری کوانتومی [۱۷] با یک مجموعه از بردارهای پایه اندازه گیری $\{|a_i\rangle, 0 \leq i \leq m\}$ مشخص می شود. عملگرهای اندازه گیری $\{M_i, 0 \leq i \leq m\}$ به صورت $|a_i\rangle\langle a_i|$ تعریف می شوند. این عملگرها روی فضای حالت سیستمی که قرار است اندازه گیری شود، اعمال می شوند. اندیس عملگرها (i) خروجی اندازه گیری را نشان می دهد. اگر حالت سیستم کوانتومی قبل از اندازه گیری $|\psi\rangle$ فرض شود، احتمال اینکه بعد از اندازه گیری نتیجه i به دست آید از رابطه (۱) محاسبه می شود.

$$p(i) = \langle \psi | M_i | \psi \rangle \quad (1)$$

اگر نتیجه i به دست آید، حالت سیستم بعد از اندازه گیری نیز به رابطه (۲) جهش می کند.

$$M_i |\psi\rangle / \sqrt{\langle \psi | M_i | \psi \rangle} \quad (2)$$

است. در نهایت، در بخش پنجم نتیجه گیری و پیشنهادهایی برای کارهای آینده بیان شده است.

۲- مفاهیم اولیه

در این بخش، ابتدا به تعریف اصول محاسبات کوانتومی و سپس مخابره از راه دور کوانتومی پرداخته می شود.

۲-۱- اصول محاسبات کوانتومی

در این بخش، اصول محاسبات کوانتومی و تعریف های ریاضی مربوطه مورد بررسی قرار می گیرند.

• کیوبیت ها

نمایش ریاضی کیوبیت^۲ به صورت برداری یک در فضای دو بُعدی هیلبرت است که $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به عنوان بردارهای پایه در این فضا مشخص شده اند. بردارهای کوانتومی پایه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به ترتیب نظیر بیت های کلاسیک صفر و یک می باشند. درواقع کیوبیت ها در یک هر برهم نهی^۳ از $|0\rangle$ و $|1\rangle$ همانند $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ می توانند قرار بگیرند که α و β اعداد مختلطی هستند به طوری که $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. اگر چنین ترکیبی نسبت به پایه های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ (پایه های محاسباتی) اندازه گیری شوند، آنگاه خروجی کلاسیک صفر با احتمال $|\alpha|^2$ و خروجی کلاسیک یک با احتمال $|\beta|^2$ مشاهده می شود. اگر خروجی کلاسیک صفر مشاهده شود، حالت پس از اندازه گیری کیوبیت $|0\rangle$ و اگر خروجی کلاسیک یک مشاهده شود، حالت پس از اندازه گیری کیوبیت $|1\rangle$ خواهد بود.

• گیت های کوانتومی

اعمال کوانتومی را می توان با شبکه ای از گیت ها محقق کرد. نمایش ریاضی هر گیت کوانتومی، به صورت یک تبدیل خطی است که با یک ماتریس یکانی^۴ موثر بر روی فضای n کیوبیتی تعریف می گردد. U یک ماتریس یکانی است اگر $UU^\dagger = I$ که U^\dagger ترانپوز مزدوج ماتریس U است. از جمله گیت های تک کیوبیتی پر کاربرد گیت هادامارد H است.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

اگر U ، یک گیت تک کیوبیتی، با نمایش ماتریسی $u = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه، گیت U کنترلی^۵، گیتی است که بر دو کیوبیت اثر می کند به طوری که کیوبیت اول، کیوبیت کنترل و کیوبیت دوم، کیوبیت هدف است. اگر کیوبیت کنترلی برابر $|1\rangle$ باشد، گیت یکانی U بر روی کیوبیت هدف اعمال می شود و اگر کیوبیت کنترل، $|0\rangle$ باشد، کیوبیت هدف بدون تغییر باقی می ماند.

۲-۲- مخابره از راه دور کوانتومی

مخابره از راه دور کوانتومی [۱۹] یک پروتکل اطلاعاتی کوانتومی است که به وسیله آن می توان حالت کوانتومی ناشناخته یک ذره را با استفاده از یک جفت ذره درهم تنیده، اندازه گیری و تبادل دو بیت از اطلاعات کلاسیک، به ذره دور دیگر منتقل کرد.

انتقال حالت کیوبیتی ها از یک افراز به افراز دیگر در یک مدار کوانتومی توزیع شده با مخابره از راه دور کوانتومی انجام می شود که یک چالش مهم و پرهزینه در پیاده سازی سیستم های توزیع شده است.

۳- روش پیشنهادی

در این بخش، پیش فرض و نمادگذاری هایی با الهام از مقاله [۱۱] ارائه می شود. فرض کنید که یک مدار کوانتومی QC به عنوان ورودی با عرض W ، اندازه S و عمق D با تعاریفی که در ادامه می آید موجود است. عرض یک مدار کوانتومی به صورت مجموع تعداد کیوبیتی ها در مدار تعریف می شود. اندازه یک مدار کوانتومی تعداد کل گیت های آن از مجموعه ای از گیت های کوانتومی جهانی است. عمق یک مدار کوانتومی، تعداد گام های اجرای مدار، D است. در هر زمان یک یا چند گیت می توانند به صورت موازی اجرا شود. در هر مرحله، مجموعه ای از گیت هایی که می توانند به صورت موازی انجام شوند، اجرا می شوند. بدون از دست دادن کلیت در روش پیشنهادی، فرض می شود در مدار کوانتومی QC ، k افراز هر کدام با اندازه $\lceil W/k \rceil$ وجود دارد. کیوبیتی ها از بالا به پایین از یک تا n در تمام افرازا شماره گذاری می شوند که i امین خط مدار از بالا به پایین، i امین کیوبیتی یعنی q_i را نشان می دهد.

گیت ها به ترتیب اجرایشان در QC شماره گذاری می شوند و g_i به معنای گیت i ام است که بر اساس یک الگوریتم زمان بندی اجرا می شود. برای گیت هایی که می توانند به صورت موازی اجرا شوند، اولویت اجرای آن ها اختیاری است. مجموعه تمام گیت های مدار با G نشان داده می شود.

در مدار کوانتومی، سه نوع گیت وجود دارد، گیت های تک کیوبیتی، گیت های $CNOT$ محلی و گیت های $CNOT$ سراسری؛ که تعاریف و نمایه های آن ها در ادامه شرح داده شده است:

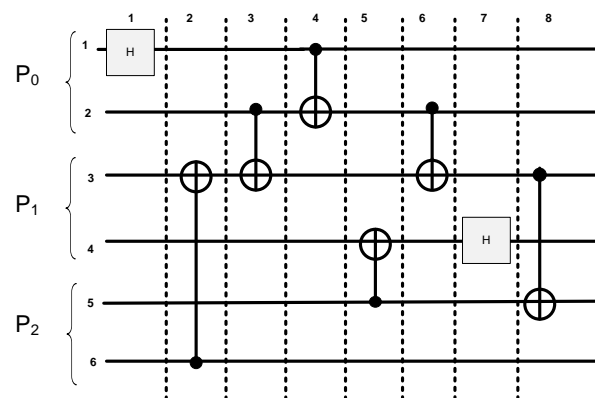
- گیت های تک کیوبیتی به صورت $game_name_i(p, j)$ ، نشان داده می شوند. p نشان دهنده اندیس افرازی (از ۱ تا k) است که $game_name_i$ متعلق به آن است و j نشان دهنده اندیس کیوبیتی است که گیت روی آن اعمال می شود.
- گیت $CNOT$ محلی گیتی است که کیوبیتی های کنترل و هدف آن به یک افراز تعلق دارند و به صورت $CNOT_i(p_c, j_c, j_t)$ نشان داده می شود. p نشان دهنده اندیس افرازی (از ۱ تا k) است که گیت

$CNOT_i$ متعلق به آن است. j_c نشانگر اندیس کیوبیتی کنترل (هدف) در افراز آن است.

- گیت $CNOT$ سراسری گیتی است که کیوبیتی های کنترل و هدف آن به افرازی های متفاوتی تعلق دارند و به صورت $CNOT_i(p_c, j_c, j_t)$ نشان داده می شود. j_c نشانگر اندیس کیوبیتی کنترل (هدف) در افراز خانه آن است. افرازی که به آن یک کیوبیتی q یک گیت سراسری $CNOT$ تعلق دارد، افراز خانه q نام دارد. p_c اندیس افرازی که به آن کنترل (هدف) یک گیت $CNOT_i$ تعلق دارد را مشخص می کند.

فرض می شود که گیت های محلی و گیت های تک کیوبیتی در همان افرازی های محلی خود اجرا می شوند. تعداد کل گیت ها و گیت های سراسری به ترتیب با m_t و m_g نشان داده می شوند. همچنین یک زیرمجموعه از G برای نشان دادن گیت های سراسری با G_d نشان داده می شود.

برای مثال شکل ۲ یک نمونه مدار کوانتومی افراز شده به سه افراز را نشان می دهد. در این شکل، گیت های ۱ و ۵ تک کیوبیتی، گیت شماره ۴ محلی و گیت های شماره ۲، ۳ و ۶ سراسری هستند.



شکل (۲): یک نمونه مدار کوانتومی افراز شده به سه افراز

$Config-Arr$ یک آرایه با اندازه m_g است که عناصر آن نشان می دهند که هر کدام از گیت های سراسری در کدام افراز قرار است اجرا شوند. مقدار ۰ (۱) برای عناصر این آرایه نشان می دهد که گیت مذکور قرار است در افراز کنترل (هدف) گیت سراسری اجرا شود. افرازی که هر کدام از گیت های g قرار است در آن بر مبنای آرایه $Config-Arr$ اجرا شوند با $g.l$ نشان داده می شود.

از یک مدار کوانتومی QC شروع می شود. روش پیشنهادی، در ابتدا، کیوبیتی ها را با استفاده از روش $K-L$ به k افراز به صورتی که در ادامه می آید منتسب می کند (بهینه سازی سطح یک). الگوریتم $K-L$ یک الگوریتم اکتشافی^۱ برای افراز بندی گراف به دو افراز با اندازه های مساوی (یا تقریباً مساوی) است که کاربردهای مهمی در طراحی مدارها و اجزای دیجیتال در VLSI دارد.

```

12: remove (G[0])
13: remove (Gd[0])
14: for i ← 0 to G.length do
15:   if NON-EXECUTE(temp, G[i]) = FALSE then
16:     for k ← i to 0 do
17:       if NON-COMMUTE(G[i], G[k]) = TRUE
18:         then
19:           sw = 1
20:           break
21:         end if
22:       end for
23:       if sw = 0 then
24:         remove (G[i])
25:         if global (G[i]) then
26:           remove (G[i] from Gd)
27:         end if
28:       end if
29:     end if
30:   end for
31: nt = nt + 1
32: MIN-K-PART-TEL (G, Config-Arr, nt)

```

تابع MIN-K-PART-TEL یک QC ، یک لیست مرتب از گیت‌ها، G و $Config-Arr$ را به عنوان ورودی می‌گیرد و کمترین تعداد مخابره از راه دور مورد نیاز را برای آن پیکربندی برمی‌گرداند. در هر گام الگوریتم، گیت‌های عمومی و سراسری که اجرا شده‌اند، از G و G_d حذف می‌شوند.

در این تابع، هنگامی که یک کیوبیت از یک گیت سراسری $CNOT$ ، $temp$ به افزاز دیگری مخابره می‌شود، کل مدار جستجو شده و تعداد بیشینه گیت‌هایی که می‌توانند بدون نیاز برگشت این کیوبیت به افزاز مبدأ اجرا شوند، اجرا می‌شوند. این بدین معنی است که کیوبیت مهاجر، به‌طور بهینه‌ای توسط کیوبیت‌های دیگر استفاده شده است بدون اینکه بخواهد به افزاز خود برگردد. تابع MIN-K-PART-TEL یک تابع بازگشتی است که حاوی دو تابع دیگر، NON-EXECUTE و NON-COMMUTE است. هنگامی که یک گیت $G[i]$ وجود دارد که برای آن تابع NON-EXECUTE(temp, $G[i]$) FALSE برمی‌گرداند، احتمالاً گیت‌های دیگری قبل از $G[i]$ وجود دارند که اجرا نشده‌اند. در این صورت، $G[i]$ تنها در صورتی می‌تواند اجرا شود که بتواند با تمام آن گیت‌ها جابجا شود. جابجایی گیت‌ها در تابع NON-COMMUTE چک می‌شود.

در ادامه جزییات این دو تابع آورده شده است.

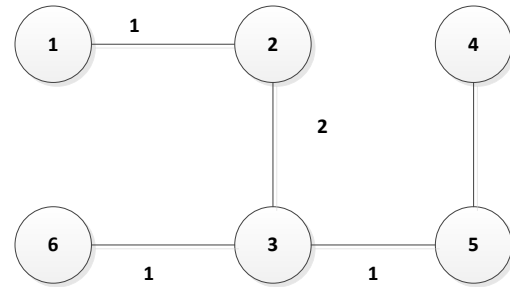
NON-EXECUTE(g, g'): این تابع، دو گیت g و g' را به عنوان ورودی گرفته و اگر نیاز باشد که کیوبیت مهاجر از گیت g به افزاز مبدأ خود برگردد و سپس گیت g' اجرا شود، TRUE برمی‌گرداند. در غیر این صورت، FALSE برمی‌گرداند.

(۱) اگر g یک گیت محلی است که یکی از کیوبیت‌های آن، مانند گیت مهاجر کیوبیت g است.

(۲) اگر g' یک گیت سراسری است که برچسب آن با g متفاوت است، یعنی $g'.l \neq g.l$

در ابتدا مدار کوانتومی داده شده را به یک گراف وزن دار تبدیل می‌کنیم. در این گراف، هر کیوبیت یک گره را نشان می‌دهد و هر گیت CNOT به یک لبه بین گره‌های گراف (کیوبیت‌های) گیتی که به آن اعمال می‌شود اشاره دارد. وزن هر لبه برابر با تعداد کل گیت‌های CNOT است که بر روی این دو کیوبیت عمل می‌کنند.

برای مثال مدار شکل ۳ گراف وزن دار متناظر با شکل ۲ را نشان می‌دهد.



شکل (۳): گراف وزن دار متناظر با شکل (۱) - هر گره متناظر با یک گره CNOT است

برای افزاز مدار کوانتومی به چند افزاز، روش K-L الگوریتم به صورت چند افزازی توسعه داده شد. اگر تعداد افزازها توانی از ۲ باشد، الگوریتم K-L به صورت بازگشتی اجرا می‌شود تا به تعداد افزازهای مورد نظر برسد. فرض کنید ۸ گره داریم که باید به ۴ افزاز، تقسیم شود. این ۸ گره با فراخوانی بازگشتی روش K-L در نهایت به ۴ افزاز هر کدام با ۲ گره، افزاز خواهد شد.

اما اگر تعداد افزازها توانی از ۲ نباشد، به گراف تعدادی گره غیر واقعی اضافه می‌شود تا دوباره افزاز با تعدادی افزاز به صورت توان ۲ انجام گیرد و گره‌های غیر واقعی نیز در افزاز جداگانه‌ای قرار گیرند و در نهایت حذف شوند.

بعد از اینکه بهینه‌سازی در سطح یک انجام شد، بهینه‌سازی در سطح دو انجام می‌شود. فرض کنید که m_g گیت CNOT سراسری در مدار کوانتومی وجود دارد. بنابراین 2^{m_g} پیکربندی متفاوت برای اجرای این گیت‌ها وجود دارد که در هر پیکربندی، در روش پیشنهادی، هریک از این پیکربندی‌ها در نظر گرفته می‌شود و برای هر کدام کمترین هزینه مخابره از راه دور به دست می‌آید (الگوریتم ۱).

الگوریتم (۱): تابع برای یافتن تعداد کمینه مخابره از راه دور برای یک پیکربندی داده شده

```

1: MIN-K-PART-TEL (G, Config-Arr, nt)
2: sw = 0
3: if Empty(G)
4:   return nt
5: end if
6: if local (G[0]) then
7:   remove (G[0])
8:   MIN-K-PART-TEL (G, Config-Arr, nt)
9: end if
10: temp = G[0]
11: nt = nt + 1

```

[۱۶] عدم توازن بین افزاها (که یک معیار مهم است) را در نظر نمی‌گیرد و در نتیجه نمی‌توان نتایج را با آن مقایسه کرد.

جدول ۱ مقایسه نتایج تعداد هزینه مخابرات از راه دور کوانتومی برای روش پیشنهادی و روش‌های [۱۴] و [۱۷] را نشان می‌دهد. همان‌گونه که این جدول نشان می‌دهد، روش پیشنهادی می‌تواند هزینه مخابره از راه دور را برای مدارهای توزیع‌شده چند افزایی نسبت به روش‌های [۱۴] و [۱۷] بهبود دهد و یا در برخی مدارات ثابت نگه دارد.

جدول ۲ نتایج مقایسه رابطه R (۳) را برای روش پیشنهادی و روش [۱۴] نشان می‌دهد. هرچه قدر این مقدار کمتر باشد، کارایی روش ارائه شده بهتر است. همان‌گونه که این جدول نشان می‌دهد، روش پیشنهادی می‌تواند معیار R را برای مدارهای توزیع‌شده چند افزایی نسبت به روش [۱۴] برای تمام مدارات محک بهبود دهد.

$$R = \frac{\text{Number_teleportations}}{2 * \text{Number_qubits}} \quad (3)$$

دلیل بهبود روش پیشنهادی نسبت به سایر روش‌ها آن است که در آن‌ها، تاکید روی بهینه‌سازی در سطح یک است در حالی که روش پیشنهادی بهینه‌سازی در دو سطح را در نظر می‌گیرد و بهینه‌سازی در سطح دو نیز در کمینه‌سازی تعداد مخابره از راه دورهای مورد نیاز اهمیت بسیار زیادی دارد.

۵- جمع‌بندی و پیشنهاد برای کارهای آتی

از آنجایی که پیاده‌سازی کامپیوترهای کوانتومی با محدودیت‌های بسیاری روبرو است، محاسبات کوانتومی توزیع‌شده راه‌حل مناسبی برای داشتن یک کامپیوتر کوانتومی بزرگ است. به عبارتی مدل مداری محاسبات کوانتومی می‌تواند به‌صورت محاسبات کوانتومی توزیع‌شده گسترش یابد که در آن هر زیرسیستم داده‌های خود را به‌صورت تقاضا از طریق کانال ارتباطی به قسمت‌های دیگر ارسال می‌کند. یک مکانیسم

قابل‌اعتماد برای چنین ارتباطی با استفاده از مفهوم مخابره از راه دور کوانتومی بین گره‌های یک سیستم کوانتومی توزیع‌شده است. به حداقل رساندن تعداد مخابرات از راه دور کوانتومی بین گره‌های یک کامپیوتر کوانتومی توزیع‌شده به‌عنوان معیاری برای سنجش بهره‌وری آن در نظر گرفته‌شده است. در [۱۱]، یک روش برای بهینه‌سازی تعداد مخابرات کوانتومی بین دو افزای یک سیستم کوانتومی توزیع‌شده ارائه شده است.

روش مقاله مذکور به‌گونه‌ای توسعه یافته که امکان بهینه‌سازی تعداد هزینه‌های مخابره از راه دور کوانتومی را برای چند افزای داشته باشد.

(۳) اگر g' یک گیت سراسری است و $g.l = g'.l$ ولی یک مخابره از راه دور دیگر برای اجرای g' نیاز است.

$NON-COMMUTE(g, g')$: این تابع دوگیت g و g' را گرفته و اگر دو گیت g و g' باهم جابجا نشوند، TRUE و در غیر این صورت FALSE برمی‌گرداند.

دو گیت CNOT باهم جابجا نمی‌شوند، اگر اندیس کیوبیت کنترل یک گیت CNOT با اندیس هدف گیت CNOT دیگر یکسان باشد. اگر یک گیت تک‌کیوبیتی U به کیوبیت کنترل یک گیت CNOT اعمال شود، با انجام محاسبات، آن‌ها در صورتی جابجا می‌شوند که U ساختاری شبیه زیر داشته باشد [۱۱]:

$$U = \begin{bmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & u_1 \end{bmatrix}$$

اگر یک گیت تک‌کیوبیتی U به کیوبیت هدف یک گیت CNOT اعمال شود، با انجام محاسبات، آن‌ها در صورتی جابجا می‌شوند که U ساختاری شبیه زیر داشته باشد:

$$U = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 \\ -u_1 & -u_0 \end{bmatrix}$$

در پایان هر اجرای الگوریتم، n_t یکی اضافه می‌شود به این علت که مخابره از راه دور کوانتومی دیگر برای بازگشت کیوبیت موردنیاز است. الگوریتم MIN-K-PART-TEL به‌صورت بازگشتی با گیت‌های موجود جدید فراخوانی می‌شود تا زمانی که گیت دیگر در G باقی نماند و کمینه تعداد مخابره از راه دورهای کوانتومی (n_t) به دست آید.

۴- نتایج و تحلیل

روش پیشنهادی با استفاده از زبان پایتون بر روی یک کامپیوتر با رم ۴ گیگ و CPU ۲ گیگاهرتز نوشته شد. برای آزمون الگوریتم پیشنهادی، از برخی توابع از کتابخانه Revlib [۱۱] که یک منبع برخط در حوزه مدارات کوانتومی و برگشت‌پذیر است استفاده شد. مدارات محک ابتدا با استفاده از روش‌های سنتز [۲۰] به کتابخانه گیت‌های CNOT و تک‌کیوبیتی تجزیه شدند.

سپس روش پیشنهادی روی خروجی این مدارات اجرا شد. قابل ذکر است که توزیع‌شدگی عملکرد مدار را تغییر نمی‌دهد و همان اعمالی که در مدار اولیه قرار بود اجرا شود، در اینجا نیز انجام می‌شوند، تنها برای اجرای گیت‌های سراسری باید یک کیوبیت (کنترل یا هدف) به افزای دیگر مخابره از راه دور کوانتومی شود که الگوریتم پیشنهادی تعیین می‌کند کدام کیوبیت جابجا شود و روی تعداد مخابره از راه دورهای مورد نیاز بهینه‌سازی انجام می‌دهد.

از آنجایی که روش پژوهش زمردی و همکاران [۱۱] تنها برای دو افزای جواب می‌دهد، امکان مقایسه با روش مقاله زمردی و همکاران [۱۱]، برای افزاهای بیشتر از دو وجود ندارد (برای تعداد افزای مساوی با ۲ این دو روش به نتایج یکسانی می‌انجامد). همچنین روش مقاله

به عنوان کارهای آینده در این زمینه پیشنهاد می شود مرحله افراز بندی اولیه و بهینه سازی هزینه تعداد مخابره از راه دور کوانتومی در مدار کوانتومی توزیع شده با هم دیده شود نه به صورت بخش های جداگانه، که در این صورت تصور می شود می توان به جواب بهتری رسید.

جدول (۱): مقایسه نتایج بین روش پیشنهادی و روش های [۱۴] و [۱۷]

مدار	تعداد کیوبیت ها	تعداد گیت ها	k	هزینه مخابره از راه دور [۱۴]	هزینه مخابره از راه دور [۱۷]	هزینه مخابره از راه دور (روش پیشنهادی)
parity_247	۱۷	۱۶	۳	۱۰	۴	۴
			۴	۱۶	۱۰	۱۴
Sym9_147	۱۲	۱۰۸	۳	۴۳	۳۶	۳۶
			۴	۵۸	۵۰	۵۰
Flip_flop	۸	۳۰	۳	۸	۸	۸
			۴	۱۶	۱۲	۱۰
Alu_primitive	۶	۲۱	۲	۱۶	۱۴	۱۲
			۴	۲۴	۲۲	۱۸
Alu_primitive_opt	۶	۲۱	۳	۱۴	۱۲	۱۰
			۴	۲۸	۲۰	۲۰

جدول (۲): مقایسه R (رابطه ۳) برای روش پیشنهادی و روش [۱۳] برای k برابر با ۳، ۵، ۷ و ۹.

مدار	k=۳		k=۵		k=۷		k=۹	
	R ([۱۳])	R (روش پیشنهادی)	R ([۱۳])	R (روش پیشنهادی)	R ([۱۳])	R (روش پیشنهادی)	R ([۱۳])	R (روش پیشنهادی)
BWT	۰/۵۵	۰/۵۰	۰/۶	۰/۴	۰/۶۴	۰/۴۸	۰/۶۵	۰/۵۴
QFT	۱	۰/۸	۱/۴	۱/۲	۱/۵۸	۱/۳۲	۱/۷۵	۱/۵۸
GSE	۰/۵۴	۰/۴۲	۰/۷	۰/۶۴	۰/۷	۰/۵۲	۰/۸	۰/۷

مراجع

- [16] Z. Davarzani, M. Zomorodi-Moghadam, M. Houshmand, and M. Nouri-baygi, "A dynamic programming approach for distributing quantum circuits by bipartite graphs," *Quantum Information Processing*, vol. 19, pp. 1-18, 2020.
- [17] E. Nikahd, N. Mohammadzadeh, M. Sedighi, and M. S. Zamani, "Automated window-based partitioning of quantum circuits," *Physica Scripta*, vol. 96, p. 035102, 2021.
- [18] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary ed.: Cambridge University Press, 2010.
- [19] م. صادقی زاده، م. هوشمند، ح. آقابابا و م. کوچک زاده، "مخبره از راه دور کوانتومی کنترلی دو طرفه حالت سه کیوبیتی GHz با استفاده از یک کانال ده کیوبیتی،" *نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران*، دوره ۱۷، شماره ۱، ۱۳۹۹.
- [20] V. V. Shende, S. S. Bullock, and I. L. Markov, "Synthesis of quantum-logic circuits," *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 25, pp. 1000-1010, 2006.
- [1] ر. بینایی، م. غلامی، س. مهدیان، "معرفی ساختارهای جدید برای لچ وفلیپ فلاپ نوع D در تکنولوژی اتوماتی سلولی نقطه‌ای کوانتومی و استفاده از آن در مدارهای آشکارساز فاز فرکانس، تقسیم کننده فرکانس و شمارنده،" *نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران*، دوره ۱۸، شماره ۱، ۱۴۰۰.
- [2] M. Caleffi, A. S. Cacciapuoti, and G. Bianchi, "Quantum Internet: from Communication to Distributed Computing!," In *Proceedings of the 5th ACM International Conference on Nanoscale Computing and Communication*, pp. 1-4, 2018.
- [3] M. Whitney, N. Isailovic, Y. Patel, and J. Kubiawicz, "Automated generation of layout and control for quantum circuits," in *Proceedings of the 4th international conference on Computing frontiers*, pp. 83-94, 2007.
- [4] R. Cleve and H. Buhrman, "Substituting quantum entanglement for communication," *Physical Review A*, vol. 56, p. 1201, 1997.
- [5] J. Cirac, A. Ekert, S. Huelga, and C. Macchiavello, "Distributed quantum computation over noisy channels," *Physical Review A*, vol. 59, p. 4249, 1999.
- [6] L. K. Grover, "Quantum telecomputation," *arXiv preprint quant-ph/9704012*, 1997.
- [7] R. Beals, S. Brierley, O. Gray, A. W. Harrow, S. Kutin, N. Linden, D. Shepherd, and M. Stather, "Efficient distributed quantum computing," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 469, p. 20120686, 2013.
- [8] R. Van Meter and S. J. Devitt, "The path to scalable distributed quantum computing," *Computer*, vol. 49, pp. 31-42, 2016.
- [9] R. Van Meter, "Distributed quantum computing systems: Technology to quantum circuits," in *2017 Symposium on VLSI Technology*, 2017, pp. T184-T185.
- [10] A. S. Cacciapuoti, M. Caleffi, F. Tafuri, F. S. Cataliotti, S. Gherardini, and G. Bianchi, "The Quantum Internet: Networking Challenges in Distributed Quantum Computing," *IEEE Network*, vol. 34, pp. 137 - 143, 2019.
- [11] M. Zomorodi-Moghadam, M. Houshmand, and M. Houshmand, "Optimizing Teleportation Cost in Distributed Quantum Circuits," *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 57, pp. 848-861, 2018.
- [12] M. Houshmand, Z. Mohammadi, M. Zomorodi-Moghadam, and M. Houshmand, "An Evolutionary Approach to Optimizing Teleportation Cost in Distributed Quantum Computation," *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 59, pp. 1-15, 2020.
- [13] P. Andrés-Martínez and C. Heunen, "Automated distribution of quantum circuits via hypergraph partitioning," *Physical Review A*, vol. 100, p032308, 2019.
- [14] K. Navi, O. Daei, M. Zomorodi-Moghadam, "Optimized Quantum Circuit Partitioning," *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 59, 2020.
- [15] B. W. Kernighan and S. Lin, "An efficient heuristic procedure for partitioning graphs," *The Bell System Technical Journal*, vol. 49, pp. 291-307, 1970.

زیر نویسها

- ¹ Teleportation
- ² Qubit
- ³ Superposition
- ⁴ Unitary
- ⁵ Controlled-U
- ⁶ Controlled-NOT
- ⁷ Measurement operator
- ⁸ Collapse
- ⁹ Heuristic