Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers
Vol. 22 No. 4, 2025
DOI: 10.61882/jiaeee.22.4.118

Estimating Physical Parameters of Y-shape Octocopter Using a Combination of Recursive Least Squares and Nonlinear Kalman Filter

Mohammad Barati[1], Arya Aghili-Ashtiani[2]

[1] MSc., Department of Electrical Engineering, Tafresh University, Tafresh 39518-79611, Iran
baraty.mohmd@gmail.com
[2] Assistant Professor, (a) Department of Electrical Engineering, Tafresh University, Tafresh 39518-79611, Iran
(b) Modern Technologies in Automation, Instrumentation, and Intelligent Control Research Lab, Central Laboratory, Tafresh University, Tafresh 39518-79611, Iran
arya.aghili@tafreshu.ac.ir

Abstract:

In this paper, the physical parameters of a Y-shaped octocopter (8-propeller VTOL UAV) have been estimated using a combination of Kalman-filter-based methods and the recursive least squares (RLS) method, where the number of sensors is less than the length of the state vector and the measurements are noisy. Knowing the relatively accurate value of the parameters helps designing a suitable model-oriented controller. The estimated parameters are: the body moments of inertia (I_x, I_y, and I_z), the rotor moment of inertia (J_r), the thrust coefficient (b), and the drag coefficient (d). To make the problem closer to reality, it is assumed that: (1) Out of 12 system states, only 6 states are measurable; (2) The measurements are noisy. Therefore, 6 unknown states are estimated by suitable filter from the Kalman family, at first. Then, the estimated states are used in the parameter estimation using the RLS method. The proposed estimation operation can be performed online and during the flight of the drone. Since the parameter estimation requires data with sufficient richness, for on-the-fly data acquisition, the control loop is closed with a not-precisely-tuned PID controller. The simulation results for various scenarios confirm the success of the proposed identification plan.

Keywords: Multirotor; VTOL UAV, Identification, Parameter Estimation, Extended Kalman Filter, Unscented Kalman Filter; Recursive Least Squares (RLS)

Article Type: Research

Received: 20. 08. 2024

Revised: 11. 07. 2025

Accepted: 28. 07. 2025

Corresponding author: A. Aghili-Ashtiani

Corresponding author's address: Department of Electrical Engineering, Tafresh University, Tafresh 39518-79611, Iran

Copyright © 2025 The Authors. Published by Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers.
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International license (https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). Non-commercial uses of the work are permitted, provided the original work is properly cited.

1. Motivation of the work

The core motivation for this research is the critical need to bridge the gap between theoretical modeling and practical control of complex multirotor drones, specifically Y-shaped octocopters. While these platforms offer significant advantages like heavy-lift capacity and fault tolerance [1], their full potential is locked behind a major practical barrier: their advanced, model-based flight controllers require precise knowledge of key physical parameters. Parameters such as moments of inertia and aerodynamic coefficients are difficult, expensive, or even impossible to measure directly with sufficient accuracy after a drone is assembled. Since the dynamic model of the drone is nonlinear [2], designing a good model-based controller requires a suitable nonlinear mathematical model. The structure of the model can be derived from physical-mechanical relationships with reasonable accuracy. However, the resulting mathematical expressions contain parameters that are difficult or impossible to measure with sufficient precision and reliability. Therefore, we aim to achieve a sufficiently accurate model under near-realistic conditions, despite imperfect measurements, by employing an appropriate estimator. This necessitates the online simultaneous estimation of system states and parameter. To cope with real-world engineering scenarios, the research is driven by the challenge of performing the identification when only a limited set of noisy sensor measurements are available, a common situation to minimize cost and complexity.

2. Contributions

The primary achievement of this article is demonstrating that a combination of a nonlinear Kalman filter (EKF or UKF) with a Recursive Least Squares (RLS) algorithm effectively overcomes the well-known observability limitations of the Augmented Kalman Filter (AKF) when tasked with estimating multiple parameters alongside system states.

Indeed, with augmented nonlinear Kalman filter, the parameters estimation does not converge for more than one unknown parameters, when we have six noisy measurements out of twelve octocopter states. Instead, if we use nonlinear Kalman filter for state estimation and RLS for parameter estimation iteratively, the parameters estimation converges as well as the states estimation. As both EKF and UKF have been used in state estimation in separate simulation results, both filters delivered nearly identical and highly accurate results, with all 12 states estimated with remarkably low Root Mean Square Error (RMSE). This finding is practically valuable as it suggests that for this specific application, the choice between the two sophisticated filters may be based on computational resources rather than a significant performance difference. Also, extending the comparison to the parameter estimation phase, the results quantitatively demonstrated that both combinations, EKF-RLS and UKF-RLS, are highly successful, converging to accurate values for all six critical physical parameters (I_x, I_y, I_z, J_r, b, d) with extremely low estimation errors (on the order of 10e-5 to 10e-7).

3. Procedures

The procedures undertaken in this work were executed under a set of specific and realistic assumptions and conditions. The foundational assumption was a known nonlinear dynamic model of a Y-shaped octocopter. The operational conditions stipulated that only six of the twelve system states, specifically the three linear velocities ($\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$) and three angular velocities ($\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$),
were available as measurable outputs. Furthermore, it was assumed that all these measurements were contaminated with additive zero-mean white Gaussian noise. The physical parameters of the drone (e.g., mass, arm lengths) were assumed known, while six key parameters (I_x, I_y, I_z, J_r, b, d) were treated as unknown constants.

The procedure began by implementing a closed-loop control system. A simple PID controller, tuned manually without requiring a precise model, was used to stabilize the aircraft. This was a necessary condition to generate stable flight data and prevent the inherently unstable drone from crashing, thereby enabling data acquisition.

The core estimation procedure was then conducted online and involved two distinct, sequential steps per time iteration. The first step was state estimation, where the available set of six noisy measurements was fed into a nonlinear Kalman filter, either an EKF or a UKF. This filter was responsible for producing accurate estimates of the full 12-state vector, which included the positions, orientations, and their derivatives. The second step was parameter estimation, where the newly estimated state values from the first step, along with the known control inputs, were supplied to a Recursive Least Squares (RLS) estimator. Crucially, for each unknown parameter, a specific linear regression model was formulated from the nonlinear system equations. The RLS algorithm then processed this data to recursively update the estimates of the six physical parameters. This entire two-step process was repeated consecutively at each time step throughout the flight.

4. Findings

The findings of this research conclusively demonstrate that the proposed hybrid estimation framework is highly effective under challenging, realistic conditions. The most significant finding is the successful and accurate simultaneous estimation of all twelve system states and all six key physical parameters—the moments of inertia (I_x, I_y, I_z), the rotor's moment of inertia (J_r), and the thrust and drag coefficients (b, d), using only a limited set of six noisy measurements.

A key quantitative finding was the remarkably low Root Mean Square Error (RMSE) achieved for both state and parameter estimation. The state estimation RMSE values for all twelve states were nearly identical between the EKF and UKF, demonstrating that both filters performed with equivalent and high accuracy in this application.

Furthermore, the parameter estimation errors were extremely small, on the order of 10^{-5} to 10^{-7}, proving the precision of the RLS algorithm when fed with the Kalman filter's state estimates.

A critically important finding was the explicit failure of the Augmented Kalman Filter (AKF) approach for more than one unknown parameter due to a loss of observability. This finding significantly underscores the necessity and superiority of the decoupled EKF/UKF-RLS approach for complex multi-parameter estimation problems.

5. Conclusion

To employ the proposed method of this article for other systems, it is useful to consider the following points:

(a) Limitations of using Kalman filter-based methods for state estimation are: (1) A mathematical model is required; (2) Linearity of the system leads to optimal estimation, and for nonlinear systems, nonlinear versions of the Kalman filter family must be used (here, both EKF and UKF methods were employed and yielded similarly good results; however, it should be noted that the UKF method may be more suitable for cases involving strong nonlinearities); (3) For the estimation algorithm to be optimal and non-divergent, the noise must be (approximately) white and Gaussian with zero mean (as assumed in this article).

(b) Limitation of using the Kalman filter for parameter estimation (the augmented Kalman filter method) is that the number of unknown parameters should not be so high that the augmented state vector loses observability (which occurred in this article, and to resolve it, the combined method of a non-augmented nonlinear Kalman filter with RLS was proposed which solved the problem).

(c) Limitations of using the RLS method for parameter estimation are: (1) The system states must be available (which, in the proposed combined method, became accessible through Kalman filter-based state estimation); (2) The nonlinear equations of the system must be such that a regression vector can be formed (as demonstrated in Section 4 of this article); (3) The system must allow generating suitable data (as illustrated in Section 2-3 of this article); (4) For optimal estimation, the noise must be white with zero mean.

Finally, since some limitations have been resolved by the proposed combined method, the remaining limitations for applying the proposed combined method are (a-1), (a-3), (c-2), and (c-3).

نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران

نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران، سال بیست و دوم، شماره چهارم، زمستان ۱۴۰۴، صفحات ۱۱۸-۱۲۷

DOI: 10.61882/jiaeee.22.4.118

تخمین پارامترهای فیزیکی پهپاد عمود-پرواز هشت-ملخه Y-شکل منتظم با به‌کارگیری روش ترکیبی فیلتر کالمن غیرخطی و کمینه مربعات بازگشتی

محمد براتی[۱]، آریا عقیلی آشتیانی[۲]

۱- کارشناسی ارشد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه تفرش- تفرش ۷۹۶۱۱-۳۹۵۱۸- ایران

baraty.mohmd@gmail.com

۲- استادیار- (آ) دانشکده مهندسی برق- دانشگاه تفرش- تفرش ۷۹۶۱۱-۳۹۵۱۸- ایران

(ب) آزمایشگاه پژوهشی فناوری‌های نوین در خودکارسازی، ابزاردقیق و کنترل هوشمند، آزمایشگاه مرکزی، دانشگاه تفرش، تفرش ۷۹۶۱۱-۳۹۵۱۸، ایران

arya.aghili@tafreshu.ac.ir

چکیده: در این مقاله، پارامترهای فیزیکی پهپاد عمود-پرواز هشت-ملخه (اکتاروتور)، با تعداد حسگر کمتر از طول بردار حالت و اندازه‌گیری‌های آلوده به نویز و مدل غیرخطی تخمین زده شده‌اند. این کار به کمک ترکیب روش‌های مبتنی بر فیلتر کالمن و روش کمینه مربعات بازگشتی (RLS) انجام شده است. دانستن مقدار نسبتا دقیق این پارامترها کمک می‌کند که بتوانیم یک کنترل‌کننده‌ی مدل-محور مناسب طراحی کنیم. پارامترهای تخمین زده شده عبارتند از: گشتاورهای لختی بدنه (I_x و I_y و I_z)، گشتاور لختی چرخانه (J_r)، ضریب رانش (b) و ضریب پَسار (d). برای این که مساله به واقعیت نزدیک‌تر باشد، فرض شده است که (۱) از دوازده حالت سیستم، تنها شش حالت قابل اندازه‌گیری هستند؛ (۲) اندازه‌گیری‌ها نویزآلود هستند. از این رو، ابتدا شش حالت نامعلوم به وسیله‌ی فیلتر مناسب از خانواده‌ی کالمن تخمین زده شده‌اند. سپس، حالت‌های تخمین‌زده شده در تخمین پارامترها به کمک روش RLS به‌کارگیری شده‌اند. عملیات تخمین پیشنهادی به صورت برخط و در حین پرواز پرنده قابل انجام است. از آنجا که تخمین پارامترها، نیازمند داده‌هایی با غنای کافی است، برای اکتساب داده در حال پرواز، حلقه کنترلی با یک کنترل‌کننده PID با تنظیم نه چندان دقیق بسته شده است. نتایج شبیه‌سازی انواع آزمایش‌های انجام شده، موید موفقیت‌آمیز بودن طرح پیشنهادی برای شناسایی سیستم است.

کلمات کلیدی: پهپاد چند-ملخه؛ پرنده‌ی عمود-پرواز؛ شناسایی سیستم؛ تخمین پارامتر؛ فیلتر کالمن توسعه‌یافته؛ فیلتر کالمن بی‌اثر؛ روش کمینه مربعات بازگشتی

نوع مقاله: پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۳/۰۵/۳۰

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۴/۲۰

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۵/۰۶

نام نویسنده‌ی مسئول: دکتر آریا عقیلی آشتیانی

نشانی نویسنده‌ی مسئول: (آ) دانشکده مهندسی برق، دانشگاه تفرش، تفرش ۷۹۶۱۱-۳۹۵۱۸، ایران (ب) آزمایشگاه پژوهشی فناوری‌های نوین در خودکارسازی، ابزاردقیق و کنترل هوشمند، آزمایشگاه مرکزی، دانشگاه تفرش، تفرش ۷۹۶۱۱-۳۹۵۱۸، ایران

حق انتشار این مستند، متعلق به نویسندگان آن است. ۱۴۰۴ ©. ناشر این مقاله، انجمن مهندسین برق و الکترونیک ایران است.

این مقاله تحت گواهی زیر منتشرشده و هر نوع استفاده غیرتجاری از آن مشروط بر استناد صحیح به مقاله و با رعایت شرایط مندرج در آدرس زیر مجاز است.

Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International license
(https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

۱- مقدمه

پرنده‌های عمود-پرواز بر اساس شاخص‌های مختلفی طبقه‌بندی می‌شوند. یک شاخص برای طبقه‌بندی پرنده‌های چندروتوره، تعداد روتور و ساختار بدنه است. معمول‌ترین ساختار پهپادها، چهار-ملخه (کوادکوپتر) است که با چهار روتور، نیروی پیش‌ران را تولید می‌کند. پهپادهای هشت-ملخه (اکتاروتورها) نیروی پیش‌ران را با هشت روتور فراهم می‌کنند و هزینه ساخت بیشتری دارند، اما در عوض، از یک سو برای حمل بارهای سنگین مناسب هستند و از سوی دیگر، قابلیت بهتری برای طراحی و اجرای کنترل مقاوم به عیب عملگرها [۱] دارند.

از آنجا که مدل دینامیکی اکتاروتور، غیرخطی [۲] است، برای طراحی یک کنترل‌کننده مدل-محور خوب، به مدل ریاضی غیرخطی مناسب نیاز داریم. ساختار مدل را می‌توان از روابط فیزیکی-مکانیکی با دقت مناسب به دست آورد. اما در روابط ریاضی به دست آمده، پارامتر-هایی وجود دارند که اندازه‌گیری آن‌ها با دقت و صحت مناسب، دشوار یا ناممکن است.

درباره‌ی پرنده‌های عمود-پرواز چند-ملخه پژوهش‌های بسیاری در حوزه‌های گوناگون (مانند مدلسازی، شناسایی سیستم، کنترل، تشخیص و شناسایی عیب، کنترل متحمل عیب، و کاربرد) انجام شده است که برای آگاهی از بخشی از مقاله‌های مرتبط می‌توان به بخش منابع [۱] مراجعه کرد. گرچه این پژوهش‌ها روی انواع گوناگون پرنده‌های چند-ملخه انجام شده است، طبق جستجوهای نویسندگان، کوادروتورها (پرنده‌های چهار-ملخه) سهم بسیار بزرگتری از منابع علمی را به خود اختصاص داده‌اند. سهم بعدی با اختلاف نسبتا زیاد متعلق به هگزاروتورها (پرنده‌های شش-ملخه) و سپس متعلق به اکتاروتورها (پرنده‌های هشت-ملخه) است. سهم باقیمانده را نیز می‌توان متعلق به ساختارهایی خاص که چندان معمول نیستند (مانند پرنده‌ای با تعداد زیادی ملخ و چرخانه برای حمل انسان، یا پرنده‌ی هشت-ملخه در ساختار چهار-ملخه‌ی هم-محور) دانست. از منابع به‌کارگیری شده در این مقاله، که مرتبط با حوزه تخمین حالت و تخمین پارامتر هستند [۶]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰] و [۱۱] برای پرنده‌ی چهار-ملخه، [۱۲] و [۱۳] برای پرنده‌ی هشت-ملخه در ساختار چهار-ملخه‌ی هم-محور (coaxial quadrotor)، و [۱۴]، [۱۵]، [۱۶] و [۱۷] برای پرنده‌ی هشت-ملخه، توسعه یافته‌اند.

در میان این پژوهش‌ها (از دید مساله‌ی تخمین حالت)، برخی به تخمین موقعیت پرنده در فضا (در دستگاه دکارتی) [۸]، [۱۱]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۷]، برخی به تخمین جهت پرنده (بر حسب زوایای اویلر در دستگاه بدنه) [۶]، [۱۰]، و برخی به هر دو (تخمین همه‌ی حالت‌های مدل فضای حالت پرنده) [۱۶]، پرداخته‌اند. شایان توجه است که در برخی از این پژوهش‌ها (مانند [۶]، [۸]، [۱۶] و [۱۷]) مدل پرنده، برای سادگی، خطی در نظر گرفته شده است و در نتیجه فیلتر کالمن معمولی برای تخمین حالت‌های مورد نظر به‌کارگیری شده است. اما، در پژوهش‌های دیگر (مانند [۹]، [۱۰] و [۱۱]، [۱۳]، [۱۴]) مدل پرنده، غیرخطی در نظر گرفته شده است و در نتیجه نسخه‌های غیرخطی فیلتر کالمن، مانند فیلتر کالمن توسعه-یافته (EKF) [۱۳] ، [۱۴] و فیلتر کالمن بی‌اثر (UKF) [۹]، [۱۰] به‌کارگیری شده‌اند. در برخی پژوهش‌ها مانند [۱۱] نیز مدل خطی چندگانه (مجموعه‌های از زیرسیستم‌های خطی) در نظر گرفته شده، که در آن فیلتر کالمن در ترکیب با فیلتر پاسخ ضربه‌ی متناهی بی‌باياس (UFIR) به‌کارگیری شده است. به هر روی، به‌کارگیری فیلترهای خانواده‌ی کالمن برای کاربردهای گوناگونی (نه تنها محدود به پرنده‌ها) مفید و متداول است. برای نمونه: در [۱۸] فیلتر کالمن بی‌اثر برای تخمین حالت دستگاه هواساز (AHU) در شرایطی که حسگر رطوبت وجود ندارد به کار گرفته شده است؛ در [۳] یک کنترل‌کننده‌ی PID تطبیقی مبتنی فیلتر کالمن برای ردیابی خورشید در یک سیستم فتوولتاییک طراح شده است؛ در [۴] پارامترهای الکترومکانیکی ژنراتور مانند ثابت اینرسی به دو روش (جداگانه‌ی) فیلتر کالمن و کمینه مربعات بازگشتی (RLS) تخمین زده شده و با یکدیگر مقایسه شده‌اند؛ در [۵] روش EKF برای تلفیق داده‌های حسگری ژیروسکوپ و حسگر ستاره، اصلاح و به‌کارگیری شده است.

مساله‌ی تخمین پارامتر در برخی پژوهش‌ها (مانند [۱۲]، [۷] و [۱۵]) مورد توجه قرار گرفته است. وقتی ساختار مدل مشخص است، تخمین پارامترهای مدل در واقع به معنی شناسایی سیستم مورد نظر است. در [۱۵]، یک مدل خطی برای پرنده چهار-ملخه در نظر گرفته و به کمک فیلتر کالمن شناسایی شده است. سپس، مدل حاصل برای آشکارسازی عیب به کار گرفته شده است. در [۱۲]، مدل غیرخطی برای پرنده‌ی هشت-ملخه در ساختار چهار-ملخه هم-محور در نظر گرفته و به کمک فیلتر کالمن بی‌اثر ریشه دومی (SRUKF) شناسایی شده است. در [۷]، پرنده چهار-ملخه مورد با مدل غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته و راهکاری برای تخمین پارامترهای مدل به صورت برخط به روش تحریک مداوم (PE) پیشنهاد شده است.

در این مقاله، قصد داریم با به‌کارگیری تخمین‌گر مناسب، با وجود اندازه‌گیری نه چندان صحیح و در شرایط نزدیک به واقعیت، به مدلی با صحت مناسب دست یابیم. برای این کار، به تخمین همزمان حالت‌ها و پارامترهای سیستم به صورت برخط می‌پردازیم. بر این اساس، شرایط واقعی را اینچنین فرض می‌کنیم: (۱) صحت مقدار اندازه‌گیری شده پارامترها خوب نیست؛ (۲) از دوازده حالت سیستم، تنها شش تا (که اندازه‌گیری آن‌ها از لحاظ عملی آسان‌تر و کم‌هزینه‌تر است) به عنوان خروجی در دسترس هستند؛ (۳) مقدار اندازه‌گیری شده هر شش خروجی، آلوده به نویز است؛ (۴) مدل سیستم، غیرخطی است. طبیعی است که (۱) هر چه صحت اندازه‌گیری پارامترها بهتر باشد، تخمین آن‌ها دقیق‌تر خواهد بود؛ (۲) هر چه تعداد حالت‌های اندازه‌گیری شده (توسط حسگر) بیشتر باشد (که البته پرهزینه‌تر است) تخمین حالت‌ها دقیق‌تر می‌شود؛ (۳) هر چه نویز اندازه‌گیری حالت‌ها کمتر باشد (که باز به معنای هزینه‌ی اولیه‌ی بیشتر است) تخمین مقادیر دقیق‌تر می‌شود؛ (۴) هر چه میزان غیرخطی بودن سیستم کمتر باشد، تخمین مقادیر دقیق‌تر خواهد بود.

در این راستا، در بخش ۲ مقاله، با معرفی (۱) پارامترهای فیزیکی مورد نظر در مدل ریاضی غیرخطی سیستم و (۲) یک کنترل‌کننده ساده PID برای کمک به داده‌برداری در حین پرواز پایدار، شرایط لازم را برای پیشنهاد روش تخمین و انجام شبیه‌سازی آماده می‌کنیم. در بخش ۳، تلاش می‌کنیم تنها با به‌کارگیری روش‌های غیرخطی خانواده‌ی فیلتر کالمن (EKF و UKF) مساله‌ی تخمین حالت‌ها و پارامترهای سیستم را حل کنیم. در نتیجه، مساله‌ی تخمین حالت‌ها به خوبی حل می‌شود، اما در مساله‌ی تخمین پارامترها با محدودیتی جدی روبرو می‌شویم که مربوط به مشاهده‌ناپذیر شدن پارامترها (در نقش حالت‌های افزوده) با زیاد شدن شمار پارامترهاست. بر این اساس، در بخش ۴، روش‌های EKF و UKF را با روش RLS ترکیب می‌کنیم. این ترکیب به گونه‌ای است که در هر لحظه از زمان، ابتدا حالت‌های (اصلی) سیستم، توسط روش‌های خانواده‌ی کالمن تخمین زده می‌شوند و سپس پارامترهای فیزیکی سیستم با داشتن حالت‌های سیستم، به روش RLS تخمین زده می‌شوند. این رویکرد منجر به حل مساله‌ی تخمین پارامترهای فیزیکی با وجود اندازه‌گیری اولیه‌ی با صحت بد و دسترسی به تنها شش حالت از دوازده حالت، آن هم در حضور نویز می‌شود. مقاله با یک جمع‌بندی مختصر در بخش ۵ به سرانجام می‌رسد.

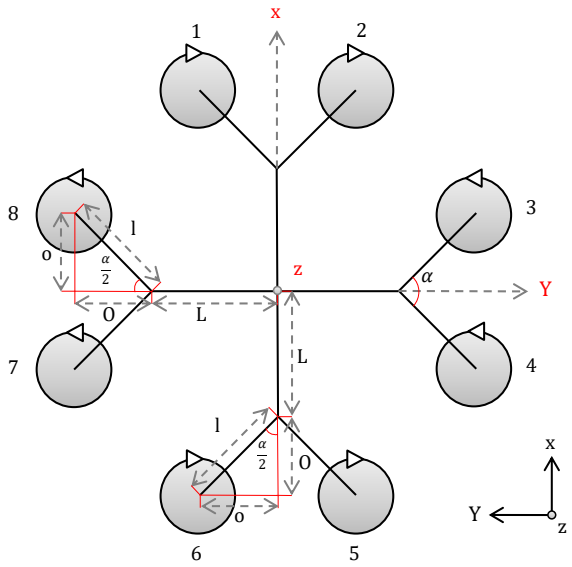
۲- آماده‌سازی

برای تعریف کامل و دقیق صورت مساله، نیاز است که مدل سیستم و پارامترهای فیزیکی سیستم به طور روشن معرفی می‌شوند. همچنین، برای حل مساله و راستی‌آزمایی روش پیشنهادی، نیاز است که پرنده در حال پرواز شبیه‌سازی شود. بدین منظور، کنترل‌کننده PID با تنظیم بی‌نیاز از مدل را به کار می‌بریم.

۲-۱- مدل فضای حالت غیرخطی اکتاروتور

ساختار فیزیکی پرنده مورد نظر (شامل محل قرارگیری روتورها و سوی چرخش آن‌ها) در شکل (۱) نشان داده شده است. شش درجه آزادی پرنده عبارتند از سه درجه آزادی موقعیت در طول محورهای x و y و z (که به ترتیب با x و y و z نمایش داده می‌شوند) و سه درجه آزادی وضعیت حول محورهای x و y و z (که به ترتیب زوایای غلت، گام، و سمت نام دارند و با φ و θ و ψ نمایش داده می‌شوند). هشت ورودی کنترلی اصلی در این مقاله، عبارتند از سرعت روتورها که با Ω_1 تا Ω_8 نام‌گذاری شده‌اند. با توجه به سوی چرخش روتورها، برایند سرعت چرخش‌ها را طبق معادله $\boldsymbol{\Omega net = \Omega_3 + \Omega_4 + \Omega_7 + \Omega_8 - (1)\Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_5 - \Omega_6}$ تعریف می‌کنیم [۲]:

$$\Omega_{net} = \Omega_3 + \Omega_4 + \Omega_7 + \Omega_8 - \Omega_1 - \Omega_2 - \Omega_5 - \Omega_6 \quad (۱)$$



شکل (۱): ساختار پهپاد هشت-ملخه‌ی Y-شکل (4Y) [۲]

برای ساده‌سازی طراحی کنترل‌کننده در پرنده‌های چند-ملخه، متداول است که چهار ورودی کنترلی میانجی u_z (نیروی پیش‌ران در جهت محور z بدنه) و u_φ و u_θ و u_ψ (به ترتیب گشتاورهای حول محورهای x و y و z بدنه) تعریف شوند و بر اساس آن، مدل پرنده به دو زیرسیستم تجزیه شود: (۱) زیرسیستم استاتیک خطی ۸- ورودی ۴- خروجی که سرعت ملخ‌ها (Ω_i) را به ورودی‌های کنترلی میانجی (u_j) تبدیل می‌کند؛ (۲) زیرسیستم دینامیک غیرخطی ۴- ورودی ۱۲- حالت که موقعیت و وضعیت پرنده را بر اساس ورودی‌های کنترلی میانجی (u_j) تعیین می‌کند. زیرسیستم استاتیک خطی با رابطه $\mathbf{u} = \mathbf{B}\boldsymbol{\omega}$ بیان می‌شود [۲]:

$$\mathbf{u} = [u_z \quad u_\varphi \quad u_\theta \quad u_\psi]^T \quad (۲)$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\Omega_1^2 \quad \Omega_2^2 \quad \Omega_3^2 \quad \Omega_4^2 \quad \Omega_5^2 \quad \Omega_6^2 \quad \Omega_7^2 \quad \Omega_8^2]^T \quad (۳)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & b & b & b & b & b & b & b \\ bo & -bo & -bO' & -bO' & -bo & bo & bO' & bO' \\ -bO' & -bO' & -bo & bo & bO' & bO' & bo & -bo \\ -d & -d & d & d & -d & -d & d & d \end{bmatrix} \quad (۴)$$

که در آن $O = l\cos\frac{\alpha}{2}$ و $o = l\sin\frac{\alpha}{2}$ و $O' = O + L$ بدین صورت تعریف می‌گردد.

زیرسیستم دینامیک غیرخطی با مدل فضای حالت $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ د

$$\begin{cases} \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = x_{10}x_{12}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) - \frac{J_r}{I_x}x_{10}\Omega_{net} + \frac{1}{I_x}u_\phi \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = x_8x_{12}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) + \frac{J_r}{I_y}x_8\Omega_{net} + \frac{1}{I_y}u_\theta \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = x_8x_{10}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) + \frac{1}{I_z}u_\psi \end{cases}$$

۶) (شامل ۵-آ و ۵-ب) بیان می‌شود [۱۹]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (\cos x_{11} \sin x_9 \sin x_7 + \sin x_{11} \sin x_7)\frac{1}{m}u_z \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = (\sin x_{11} \sin x_9 \cos x_7 - \cos x_{11} \sin x_7)\frac{1}{m}u_z \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = -g + \cos x_7 \cos x_9 \frac{1}{m}u_z \end{cases} \quad (۵-آ)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = x_{10}x_{12}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) - \frac{J_r}{I_x}x_{10}\Omega_{net} + \frac{1}{I_x}u_\phi \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = x_8x_{12}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) + \frac{J_r}{I_y}x_8\Omega_{net} + \frac{1}{I_y}u_\theta \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = x_8x_{10}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) + \frac{1}{I_z}u_\psi \end{cases} \quad (۶-ب)$$

که در آن بردار متغیرهای حالت طبق بردار $\boldsymbol{x}$ = $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9\ x_{10}\ x_{11}\ x_{12}]^T$ = $[x\ \dot{x}\ y\ \dot{y}\ z\ \dot{z}\ \varphi\ \dot{\varphi}\ \theta\ \dot{\theta}\ \psi\ \dot{\psi}]^T$ (۷) تعریف می‌شود:

$$[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9\ x_{10}\ x_{11}\ x_{12}]^T = [x\ \dot{x}\ y\ \dot{y}\ z\ \dot{z}\ \varphi\ \dot{\varphi}\ \theta\ \dot{\theta}\ \psi\ \dot{\psi}]^T \quad (۷)$$

همچنین، برای نزدیک بودن به واقعیت، خروجی زیرسیستم دینامیک غیرخطی را اینچنین بیان می‌کنیم:

$$\mathbf{y} = [\dot{x}\ \ \dot{y}\ \ \dot{z}\ \ \dot{\phi}\ \ \dot{\theta}\ \ \dot{\psi}]^T \quad (۸)$$

بر این اساس، کافی است منطق کنترلی، بردار $\mathbf{u}$ مناسب را تولید کند تا پس از آن، بردار $\boldsymbol{\omega}$ با پیش‌ضرب شبه‌معکوس راست، یعنی $\mathbf{u} = \mathbf{B}_{\mathrm{RPI}}\boldsymbol{\omega}$ در (۷) محاسبه شود= $\mathbf{B}_{\mathrm{RPI}} = \mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1}$ [۲]:

$$\begin{bmatrix} 1/G & bo/S & -bO'/S & -1/G \\ 1/G & -bo/S & -bO'/S & -1/G \\ 1/G & -bO'/S & -bo/S & 1/G \\ 1/G & -bO'/S & bo/S & 1/G \\ 1/G & -bo/S & bO'/s & -1/G \\ 1/G & bo/S & bO'/S & -1/G \\ 1/G & bO'/S & bo/S & 1/G \\ 1/G & bO'/S & -bo/S & 1/G \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{RPI}} = \mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/G & bo/S & -bO'/S & -1/G \\ 1/G & -bo/S & -bO'/S & -1/G \\ 1/G & -bO'/S & -bo/S & 1/G \\ 1/G & -bO'/S & bo/S & 1/G \\ 1/G & -bo/S & bO'/s & -1/G \\ 1/G & bo/S & bO'/S & -1/G \\ 1/G & bO'/S & bo/S & 1/G \\ 1/G & bO'/S & -bo/S & 1/G \end{bmatrix} \quad (۹)$$

که در آن $G = 8b$ و $S = 4(b^2O'^2 + b^2o^2)$ بیان می‌شود.

۲-۲- پارامترهای مدل

پارامترهای مدل در حقیقت ناشی از ویژگی‌های فیزیکی پرنده هستند که در جدول (۱) **Error! Reference source not found.** به همراه مقدار نمونه برای پرنده مورد نظر در این مقاله معرفی شده‌اند. از این میان، برای یک پرنده واقعی، برخی پارامترها مانند جرم (m) را به طور معمول می‌توان با یک اندازه‌گیری ساده با صحت خوبی به دست آورد. اما اندازه‌گیری برخی پارامترها مانند ضریب رانش و ضریب پَسار و حتی گشتاورهای لختی با دشواری‌هایی روبروست که هدف این مقاله، تخمین همین نوع پارامترهاست.

جدول (۱): ویژگی‌های فیزیکی پرنده [۲]

نماد	تعریف	مقدار	واحد
L	طول بازوی داخلی اکتاروتور	0.158	m
l	طول بازوی خارجی اکتاروتور	0.25	m
α	زاویه بین بازوهای خارجی	78	Degree
m	وزن پرنده	1.56	kg
I_x	گشتاور لختی حول محور x	0.04	kg.m^2
I_y	گشتاور لختی حول محور y	0.04	kg.m^2
I_z	گشتاور لختی حول محور z	0.08	kg.m^2
b	ضریب رانش (thrust coefficient)	10e-6	N.s^2
d	ضریب پَسار (drag coefficient)	0.3e-6	N.m.s^2
J_r	گشتاور لختی چرخانه (rotor)	90e-6	kg.m^2
g	ثابت گرانشی	9.81	m/s^2
	حداکثر نیروی پیش‌رانش روتور	6.25	N

۲-۳- بستن حلقه کنترلی ساده با کنترل‌کننده PID

از یک سو، برای تخمین پارامترهای پهپاد نیاز به داده‌های واقعی داریم و از سوی دیگر، می‌دانیم که نقطه تعادل پهپاد، ناپایدار است و پهپاد بی‌کنترل به سرعت سقوط می‌کند و ضمن این که آسیب می‌بیند فرصت کافی برای داده‌برداری هم باقی نمی‌ماند [۱۶]. بنابراین، رویه تخمین را باید در حالت حلقه-بسته یعنی با حضور کنترل‌کننده انجام دهیم.

به‌کارگیری کنترل‌کننده PID برای کنترل چنین پهپادی، یک خوبی و یک بدی دارد: (۱) خوبی آن این است که تنظیم ضرایب کنترل‌کننده بی‌نیاز از آماده بودن مدل (دانستن مقدار پارامترها) است؛ (۲) بدی آن این است که یک کنترل‌کننده PID خوب تنظیم شده در یک نقطه کار، (به دلیل غیرخطی بودن دینامیک پهپاد) تنها حول همان نقطه کار خوب عمل می‌کند. در اینجا، هدف ما داده‌برداری است. پس کیفیت کنترل، در حدی که از سقوط پهپاد جلوگیری کند و بتوانیم داده‌هایی را حول نقطه تعادل پهپاد جمع‌آوری کنیم کفایت می‌کند.

بدیهی است که پس از انجام موفقیت‌آمیز تخمین پارامترها (که خروجی این مقاله است) می‌توان از روش‌های کنترلی قدرتمند مدل-محور (مانند کنترل حالت لغزشی) برای پرواز با کیفیت پهپاد بهره برد. بنابراین، مورد (۲) مشکلی برای هدف ما ایجاد نمی‌کند.

شایان ذکر است که برای رسیدن به نتایج مطلوب در تخمین پارامترهای اکتاروتور، نیازی به هدایت خودکار پهپاد نداریم. به عبارت دیگر، کنترل چهار متغیر $z,\ \varphi,\ \theta,\ \psi$ کفایت می‌کند. بنابراین، برای کاهش چهار سیگنال خطا نسبت به مقدارهای مطلوب (با اندیس d):

$$\begin{cases} e_z = z - z_d \\ e_\varphi = \varphi - \varphi_d \\ e_\theta = \theta - \theta_d \\ e_\psi = \psi - \psi_d \end{cases} \quad (۱۰)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_z = K_{pz}e_z + K_{dz}\dot{e}_z + K_{iz}\int e_z\, d_t \\ u_\varphi = K_{p\varphi}e_\varphi + K_{d\varphi}\dot{e}_\varphi + K_{i\varphi}\int e_\varphi\, d_t \\ u_\theta = K_{p\theta}e_\theta + K_{d\theta}\dot{e}_\theta + K_{i\theta}\int e_\theta\, d_t \\ u_\psi = K_{p\psi}e_\psi + K_{d\psi}\dot{e}_\psi + K_{i\psi}\int e_\psi\, d_t \end{cases} \quad (۱۱)$$

سپس، با تنظیم ضرایب PID با سعی و خطا، تخمین پارامترها به صورت حلقه-بسته انجام خواهد شد.

۳- به‌کارگیری روش‌های تخمین مبتنی بر خانواده‌ی فیلتر کالمن برای تخمین حالت‌ها و پارامترهای سیستم

فیلتر کالمن برای سیستم‌های خطی، یک فیلتر بهینه است [۶]. با توجه به این که سیستم مورد نظر در این مقاله، غیرخطی است، گونه‌های غیرخطی فیلتر کالمن (فیلتر کالمن توسعه‌یافته و فیلتر کالمن بی‌اثر) را به کار می‌بریم . وجه مشترک این گونه‌ها، از یک سو داشتن دو گام اصلی پیش‌بینی و بروزرسانی و از سوی دیگر به‌کارگیری نوعی خطی‌سازی متناسب با نقطه کار در هر لحظه از زمان است. در این راستا، تلاش می‌کنیم تا ابتدا همه دوازده حالت سیستم را از روی شش خروجی نویزآلود تخمین بزنیم [۲] و سپس با افزودن پارامترها به بردار حالت (به عنوان حالت‌های مجازی) مقدار پارامترها را نیز (با رویکرد فیلتر کالمن افزوده) تخمین بزنیم.

۳-۱- فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF) برای تخمین حالت‌ها

در فیلتر کالمن توسعه‌یافته از خطی‌سازی بر مبنای گسترش تیلور استفاده می‌شود. بنابراین، اگر نسخه‌ی گسسته-زمان معادلات سیستم غیرخطی را اینچنین در نظر بگیریم:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, \mathbf{u}_n)$$
$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_n) \quad (۱۲)$$

آنگاه ماتریس‌های ژاکوبین زیر را در الگوریتم فیلتر به کار می‌بریم:

$$\mathbf{F}_n = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1},\mathbf{u}_n} \quad (۱۳)$$

$$\mathbf{H}_n = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}} \quad (۱۴)$$

بر این اساس، روابط ریاضی این فیلتر به قرار زیر خواهند بود:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1|n} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{n|n}, \mathbf{u}_n) \quad (۱۵)\ \text{(پیش‌بینی حالت)}$$

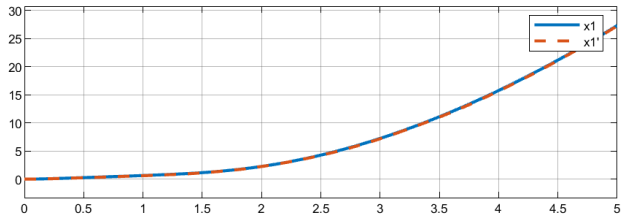
$$\mathbf{P}_{n+1|n} = \mathbf{F}_n\mathbf{P}_{n|n}\mathbf{F}_n^T + \mathbf{Q} \quad (۱۶)\ \text{(پیش‌بینی کواریانس حالت)}$$

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{P}_{n|n-1}\mathbf{H}_n^T(\mathbf{H}_n\mathbf{P}_{n|n-1}\mathbf{H}_n^T + \mathbf{R}_n)^{-1} \quad (۱۷)\ \text{(محاسبه بهره کالمن)}$$

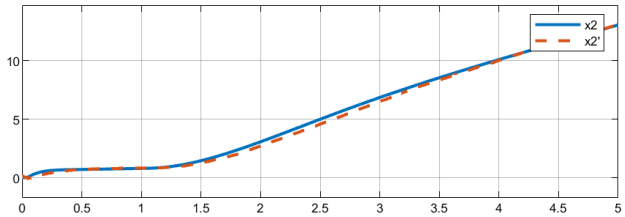
$$\hat{\mathbf{x}}_{n|n} = \hat{\mathbf{x}}_{n|n-1} + \mathbf{K}_n(\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n\hat{\mathbf{x}}_{n|n-1}) \quad (۱۸)\ \text{(بروزرسانی حالت)}$$

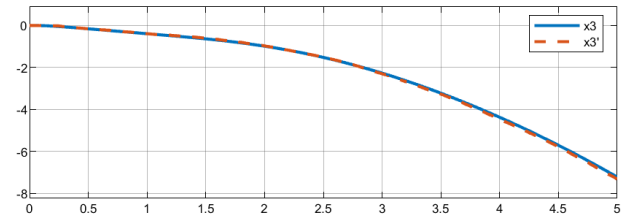
$$\mathbf{P}_{n|n} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_n\mathbf{H}_n)\mathbf{P}_{n|n-1}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_n\mathbf{H}_n)^T + \mathbf{K}_n\mathbf{R}_n\mathbf{K}_n^T$$

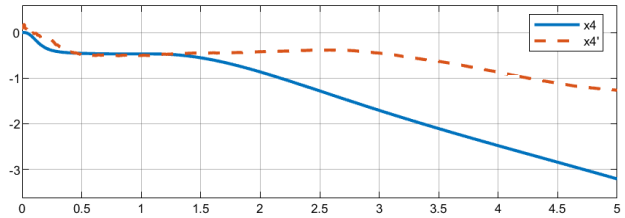
نتایج تخمین حالت‌های اکتاروتور با فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF) در نمودارهای شکل دیده می‌شود.

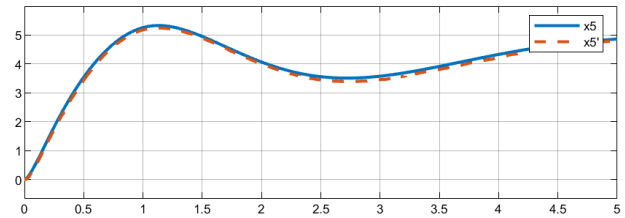


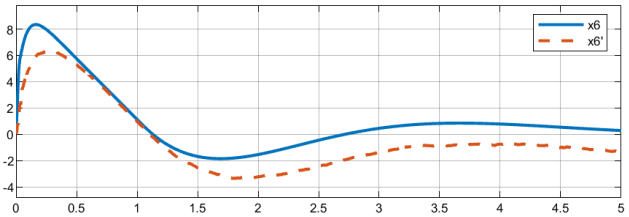
(شکل ادامه دارد.)

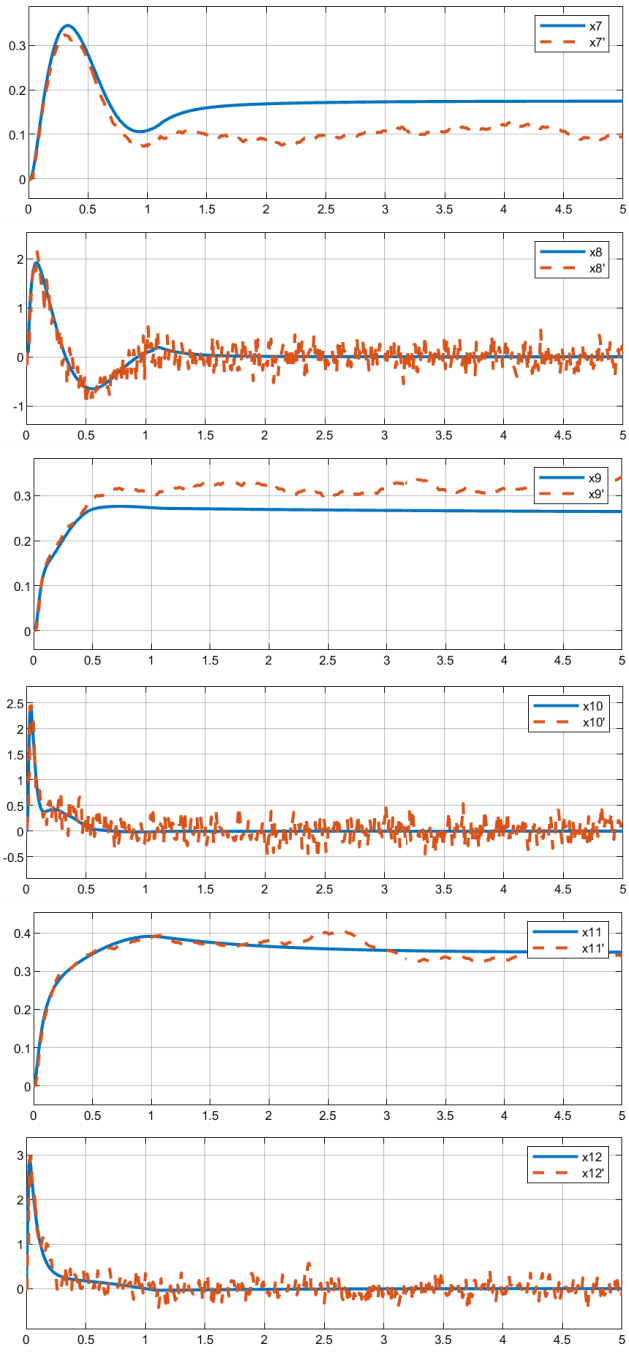












شکل (۲): تخمین حالت‌های اکتاروتور با

۲-۳- فیلتر کالمن بی‌اثر (UKF) برای تخمین حالت‌ها

در فیلتر کالمن بی‌اثر، از خطی‌سازی تصادفی با به‌کارگیری ویژگی‌های آماری (میانگین و کواریانس) نگاشت غیرخطی استفاده می‌شود. بنابراین، در این روش، نیازی به محاسبه ماتریس ژاکوبین نیست. در عوض، مجموعه‌ای از نقاط تصادفی به نام نقاط سیگما با میانگین و واریانس معین تولید و به نگاشت غیرخطی اعمال می‌شوند. سپس، با بررسی ویژگی‌های آماری تصویر نقاط سیگما، ویژگی‌های آماری نگاشت غیرخطی محاسبه می‌شود. گام‌های اصلی اجرای این فیلتر به قرار زیر هستند [۱۸]:

- **تعیین شرایط اولیه:** فیلتر کالمن بی‌اثر مشابه با فیلتر کالمن توسعه‌یافته در ابتدا نیاز به یک مقدار اولیه دارد. مقادیر اولیه برای آغاز حلقه بازگشتی یک مقدار اولیه تخمین $\mathbf{x}\hat{0} = \mathbf{E}[\mathbf{x_0}]$ و (۲۰) یک ماتریس کواریانس $\mathbf{P0} = \mathbf{E}[(\mathbf{x_0} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0})(\mathbf{x_0} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0})^T]$ است. (۲۱)

$$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0} = \mathbf{E}[\mathbf{x_0}] \quad (۲۰)$$

$$\mathbf{P}_\mathbf{0} = \mathbf{E}[(\mathbf{x_0} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0})(\mathbf{x_0} - \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0})^T] \quad (۲۱)$$

- **انتخاب نقاط سیگما:** نقاط سیگما مشابه با فیلتر بی‌اثر مقیاس شده انتخاب می شود (مطابق با $\boldsymbol{\chi}\mathbf{k} = [\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{k} \quad \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{k} \pm \sqrt{(n_x + \lambda)\mathbf{P}_\mathbf{x}}]$ (۲۲)). همچنین وزن نقاط سیگما طبق رابطه $\mathbf{W0}(c)\hat{} = \frac{\lambda}{(n_x+\lambda)+(1-\alpha^2+\beta)}$ (۲۳) محاسبه می‌شود.

$$\boldsymbol{\chi}_\mathbf{k} = [\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{k} \quad \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{k} \pm \sqrt{(n_x + \lambda)\mathbf{P}_\mathbf{x}}] \quad (۲۲)$$

$$\mathbf{W}_\mathbf{0}^{(c)} = \frac{\lambda}{(n_x+\lambda)+(1-\alpha^2+\beta)} \quad (۲۳)$$

- **گام بروز رسانی زمانی:** در این گام زمانی، ابتدا حالت‌های سیستم براساس نقاط سیگما محاسبه شده $\chi^x_{k+1|k}$ $\boldsymbol{\chi}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}|\boldsymbol{k}\boldsymbol{x} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\chi}^x_k, \mathbf{u}_k)$ (۲۴) و سپس نقاط وزن‌دار شده $\mathbf{x}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}|\boldsymbol{k}\hat{} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathbf{W}_i^{(m)} \boldsymbol{\chi}_{i,k+1|k}$ (۲۵) و ماتریس کواریانس شده برای حالت‌ها $\mathbf{P}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}|\boldsymbol{k} = \sum_{i=0}^{2n}$

محاسبه شده $\gamma_{k+1|k}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}|\boldsymbol{k}$

$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$

و خروجی نقاط سیگما $\mathbf{h}(\boldsymbol{\chi}$) (۲۶)

و (۲۷)

وزن‌دار $\mathbf{y}_{k+1|}$

$\mathbf{W}^{2n}$ (۲۸) می‌شوند.

$$\boldsymbol{\chi}^{x}_{k+1|k} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\chi}^{x}_{k}, \mathbf{u}_k) \quad (۲۴)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathbf{W}_i^{(m)} \boldsymbol{\chi}_{i,k+1|k} \quad (۲۵)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathbf{W}_i^{(c)} \left[\boldsymbol{\chi}_{i,k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\right]\left[\boldsymbol{\chi}_{i,k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\right]^T + \mathbf{Q}_{k+1} \quad (۲۶)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{k+1|k} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\chi}^{x}_{k}) \quad (۲۷)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathbf{W}_i^{(m)} \boldsymbol{\gamma}_{i,k+1|k} \quad (۲۸)$$

$$\mathbf{P}_{\tilde{y}_k\tilde{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathbf{W}_i^{(c)} \left[\boldsymbol{\gamma}_{i,\ k+1|k} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}\right]\left[\boldsymbol{\gamma}_{i,\ k+1|k} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}\right]^T + \mathbf{R}_{k+1} \quad (۲۹)$$

$$\mathbf{P}_{\tilde{x}_k\tilde{y}_k} = \sum_{i=0}^{2n_x} \mathbf{W}_i^{(c)} \left[\boldsymbol{\chi}_{i,\ k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\right]\left[\boldsymbol{\chi}_{i,\ k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}\right]^T \quad (۳۰)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{\tilde{x}_k\tilde{y}_k}\mathbf{P}^{-1}_{\tilde{y}_k\tilde{y}_k} \quad (۳۱)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{P}_{\tilde{y}_k\tilde{y}_k}K^T_{k+1} \quad (۳۲)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1|k}) \quad (۳۳)$$

برای مقایسه‌ی نتایج تخمین حالت، شرایط اولیه‌ی فیلتر کالمن بی-اثر مشابه با فیلتر کالمن توسعه‌یافته فرض شده است و به همان ترتیب، تنها شش حالت نویزآلود $[\dot{x}_2\ \dot{x}_4\ \dot{x}_6\ \dot{x}_8\ \dot{x}_{10}\ \dot{x}_{12}]^T$ قابل اندازه-گیری هستند و باید همه حالت‌ها تخمین زده شوند. نمودار تخمین حالت‌ها با روش UKF، بسیار شبیه به نتایج روش EKF به دست آمده است. به همین دلیل، از رسم دوباره‌ی نمودارها در اینجا صرف‌نظر می‌کنیم. در عوض، برای بررسی دقیق‌تر حالت‌های تخمین‌زده شده و مقایسه‌ی نتایج دو روش، شاخص ریشه‌ی میانگین مربعات خطا (RMSE) را برای هر حالت در جدول (۲) ارائه می‌کنیم.

جدول (۲): جذر میانگین مربعات خطا EKF و UKF

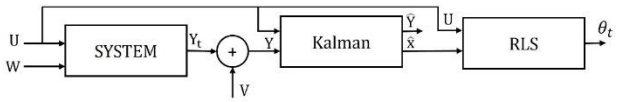
متغیر حالت	EKF	UKF
x_1	0.0776	0.0775
x_2	0.03343	0.0333
x_3	0.0964	0.09625
x_4	1.943	1.93
x_5	0.0586	0.058
x_6	1.617	1.614
x_7	0.07857	0.0773
x_8	0.1333	0.1326
x_9	0.07548	0.0742
x_{10}	0.02238	0.02234
x_{11}	0.01129	0.0112
x_{12}	0.0697	0.068

۳-۳- فیلتر کالمن افزوده (AKF) برای تخمین پارامترها علاوه بر حالت‌ها

پارامترهایی که نیاز داریم تخمین بزنیم عبارتند از: گشتاورهای لختی بدنه حول سه محور (I_x و I_y و I_z)، گشتاور لختی چرخانه (J_r)، ضریب رانش (b) و ضریب پَسار (d) که در جدول (۱) معرفی شدند. کارکرد فیلتر کالمن افزوده (Augmented) بدین گونه است که پارامتر مورد نظر به صورت یک متغیر حالت مجازی به بردار حالت افزوده می‌شود. برای نمونه، اگر یکی از پارامترها را بخواهیم به تخمین بیفزاییم، طول بردار حالت از ۱۲ به ۱۳ می‌رسد. در مساله‌ی مورد نظر ما، این کار ابتدا برای یک پارامتر انجام شد و تخمین به خوبی انجام شد. اما مشاهده شد که با افزودن تعداد پارامترها، تخمین دیگر به خوبی انجام نشد که دلیل آن رویت‌ناپذیری هر چه بیشتر سیستم با افزایش تعداد حالت‌های مجازی است. بنابراین، برای تخمین همه‌ی پارامترهای مورد نظر در کنار همه‌ی حالت‌های مورد نظر، به‌کارگیری روش کمینه مربعات بازگشتی (RLS) و ترکیب آن را با فیلتر کالمن پیشنهاد می‌دهیم که در بخش بعد بررسی می‌شود.

۴- تخمین پارامترهای I_x و I_y و I_z و J_r و b و d علاوه بر حالت‌های سیستم با روش‌های ترکیبی EKF-RLS و UKF-RLS

با توجه به مشکل رویت‌ناپذیری مطرح شده در بخش قبل، در این بخش، دو روش EKF/UKF و RLS را طبق شکل ۳ ترکیب می‌کنیم، به گونه‌ای که ابتدا، حالت‌های سیستم، توسط فیلتری از خانواده‌ی کالمن تخمین زده شوند و سپس، نتیجه‌ی آن برای تخمین پارامترهای فیزیکی سیستم، به تخمین‌گر RLS داده شود.



شکل (۳): نمودار جعبه‌ای روش ترکیبی پیشنهادی

روش کمینه مربعات بازگشتی (RLS)، با ایجاد یک الگوریتم بازگشتی برای کمینه کردن مربعات خطا، تخمینی از پارامترهای سیستم می‌زند. برای مدل رگرسیون خطی در قالب $y(t) = \boldsymbol{\phi}^T(t)\boldsymbol{\theta}(t)$ ، تخمین پارامترهای سیستم با روش RLS طبق روابط $\boldsymbol{k(t)} = \boldsymbol{P(t-}$ (۳۴)$\boldsymbol{1)\phi(t)}\left(\boldsymbol{1+\phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}\right)^{-1}$ و $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\theta}$ و $\boldsymbol{Pt} =$ (۳۵)$\boldsymbol{\hat{\theta}(t-1) + k(t)(y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1))}$ و $\boldsymbol{(I - k(t)\phi^T(t))P(t-1)}$ (۳۶) انجام می‌شود:

$$\boldsymbol{k(t) = P(t-1)\phi(t)}\left(\boldsymbol{1+\phi^T(t)P(t-1)\phi(t)}\right)^{-1} \quad (۳۴)$$

$$\boldsymbol{\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + k(t)(y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1))} \quad (۳۵)$$

$$\boldsymbol{P(t) = (I - k(t)\phi^T(t))P(t-1)} \qquad (۳۶)$$

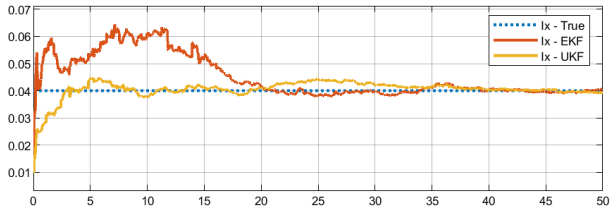
که در آن، $\boldsymbol{\phi}$ بردار عبارت‌های معلوم (رگرسور) و $\boldsymbol{\theta}$ بردار عبارت‌های مجهول، $\boldsymbol{k}$ بردار بهره‌ی روش بازگشتی، $\boldsymbol{P}$ ماتریس کواریانس عدم‌قطعیت سیستم، و $\boldsymbol{I}$ ماتریس همانی است. بدیهی است که این روش نیازمند تعیین مقادیر اولیه $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(0)$ و $\widehat{\boldsymbol{P}}(0)$ برای شروع تخمین است.

برای این که تخمین‌گر RLS بتواند به خوبی پارامترها را تخمین بزند، نیاز به داشتن تخمین خوبی از حالت‌های سیستم داریم. بنابراین، بخش تخمین حالت‌ها را بر عهده‌ی فیلتری از خانواده‌ی کالمن (EKF/UKF) می‌گذاریم. اما برای تخمین هر یک از پارامترها به کمک RLS، از معادلات سیستم به شرح زیر بهره می‌بریم.

- تخمین گشتاور لختی بدنه حول محور x (I_x):

$$\dot{x}_8 = x_{10}x_{12}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) - \frac{J_r}{I_x}x_{10}\Omega_{net} + \frac{1}{I_x}u_\varphi$$

$$\widehat{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \frac{I_y - I_z}{I_x} \\ \frac{J_r}{I_x} \\ \frac{1}{I_x} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} x_{10}x_{12} \\ -x_{10}\Omega_{net} \\ u_\varphi \end{bmatrix},\quad I_x = \frac{1}{\widehat{\theta}\{3\}}$$

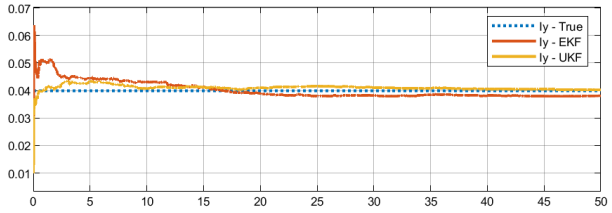


شکل (۴): تخمین پارامتر I_x در حضور نویز
RMSE-EKF = 0.0006679 و RMSE-UKF = 0.0004066

- تخمین گشتاور لختی بنده حول محور y (I_y):

$$\dot{x}_{10} = x_8x_{12}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) + \frac{J_r}{I_y}x_8\Omega_{net} + \frac{1}{I_y}u_\theta$$

$$\hat{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \frac{I_z - I_x}{I_y} \\ \frac{J_r}{I_y} \\ \frac{1}{I_y} \end{bmatrix},\quad \phi(t) = \begin{bmatrix} x_8x_{12} \\ x_8\Omega_{net} \\ u_\theta \end{bmatrix},\quad I_y = \frac{1}{\widehat{\theta}\{3\}}$$

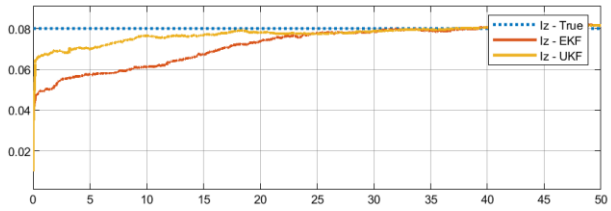


شکل (۵): تخمین پارامتر I_y در حضور نویز
RMSE-EKF = 0.0002473 و RMSE-UKF = 0.001919

- تخمین گشتاور لختی بنده حول محور z (I_z):

$$\dot{x}_{12} = x_8x_{10}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) + \frac{1}{I_z}u_\psi$$

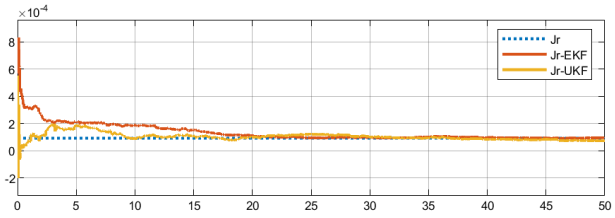
$$\hat{\theta}(t) = \begin{bmatrix} \frac{I_x - I_y}{I_z} \\ \frac{1}{I_z} \end{bmatrix},\quad \phi(t) = \begin{bmatrix} x_8x_{10} \\ u_\psi \end{bmatrix},\quad I_z = \frac{1}{\widehat{\theta}\{2\}}$$



شکل (۶): تخمین پارامتر I_z در حضور نویز
RMSE-EKF = 0.001685 و RMSE-UKF = 0.001801

- تخمین گشتاور لختی چرخانه (J_r): با به‌کارگیری روابط I_x داریم:

$$J_r = \widehat{\theta}\{2\}I_x$$



شکل (۷): تخمین پارامتر J_r در حضور نویز
RMSE-EKF = 1.755e-5 و RMSE-UKF = 5.209e-6

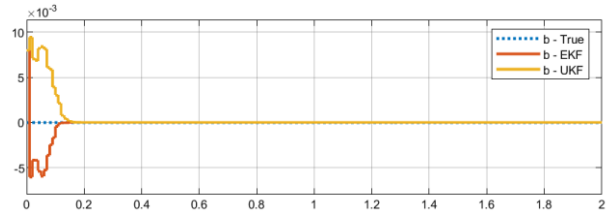
توجه: برای تخمین پارامترهای b و d، ابتدا معادله اکتاروتور را بر حسب سرعت روتورها می‌نویسیم.

- تخمین ضریب رانش (b): برای تخمین پارامتر b می توان از هر یک از معادلات $\dot{x}_2$ و $\dot{x}_4$ و $\dot{x}_6$ و $\dot{x}_8$ و $\dot{x}_{10}$ استفاده کرد که به انتخاب معادله $\dot{x}_8$ را به کار می‌بریم:

$$\dot{x}_8 - x_{10}x_{12}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) + \frac{J_r}{I_x}x_{10}\Omega_{net} = \frac{1}{I_x}b\,[\,O'(\Omega_7^2 + \Omega_8^2 - \Omega_3^2 - \Omega_4^2) + o\,(\Omega_1^2 + \Omega_6^2 - \Omega_2^2 - \Omega_5^2)]$$

$$\hat{\theta}(t) = b$$

$$\phi(t) = \frac{1}{I_x}\,[\,O'(\Omega_7^2 + \Omega_8^2 - \Omega_3^2 - \Omega_4^2)\; + o\,(\Omega_1^2 + \Omega_6^2 - \Omega_2^2 - \Omega_5^2)]$$



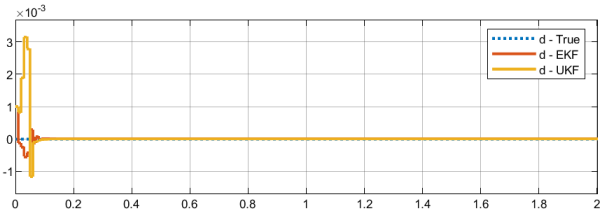
شکل (۸): تخمین پارامتر b، در حضور نویز
RMSE-EKF = 9.987e-6 و RMSE-UKF = 1e-5

- تخمین ضریب پَسار (d): برای تخمین پارامتر d باید از معادله‌ی $\dot{x}_{12}$ استفاده کرد که در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$\dot{x}_{12} - x_8x_{10}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) = \frac{1}{I_z}d(\Omega_3^2 + \Omega_4^2 + \Omega_7^2 + \Omega_8^2 - \Omega_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_5^2 - \Omega_6^2)$$

$$\hat{\theta}(t) = d$$

$$\phi(t) = \frac{1}{I_z}(\Omega_3^2 + \Omega_4^2 + \Omega_7^2 + \Omega_8^2 - \Omega_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_5^2 - \Omega_6^2)$$



شکل (۹): تخمین پارامتر b، در حضور نویز
RMSE-UKF = 3e-7 و RMSE-EKF = 5.645e-7

نتیجه‌ی تخمین همه‌ی پارامترها در جدول (۳) مشاهده می‌شود.

جدول (۳): جذر میانگین مربعات خطا EKF-RLS و UKF-RLS

پارامتر	EKF – RLS	UKF - RLS
I_x	0.0006679	0.0004066
I_y	0.0002473	0.001919
I_z	0.001685	0.001801
J_r	1.755e-5	5.209e-6
b	9.987e-6	1e-5
d	5.645e-7	3e-7

۵- جمع‌بندی

تخمین همزمان حالت‌ها و پارامترهای پهپاد هشت-ملخه Y-شکل منتظم مورد بررسی قرار گرفت. تخمین همه‌ی حالت‌ها (۱۲ متغیر حالت مربوط به موقعیت و جهت) با به‌کارگیری نسخه‌ی غیرخطی فیلتر کالمن با موفقیت انجام شد. کیفیت تخمین، برای دو روش فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF) و فیلتر کالمن بی‌اثر (UKF) تقریبا یکسان و هر دو قابل قبول بود. برای تخمین پارامتر، ابتدا نسخه‌ی افزوده‌ی (Augmented) دو فیلتر EKF و UKF به کار گرفته شد. این کار برای یک پارامتر منجر به موفقیت تخمین شد. اما، با افزودن تعداد پارامترها، با توجه به کاهش رویت‌پذیری سیستم، تخمین ناموفق شد. برای رفع این مشکل و تخمین پارامترها، در ادامه، با توجه به ساختار ریاضی مدل غیرخطی، روش کمینه مربعات بازگشتی به کار گرفته شد که منجر به موفقیت تخمین برای همه‌ی پارامترهای سیستم، یعنی گشتاورهای لختی (I_x و I_y و I_z)، گشتاور لختی چرخانه (J_r)، ضریب رانش (b) و ضریب پَسار (d) شد. گفتنی است که در بخش کمینه مربعات بازگشتی، از اطلاعات حالت‌ها استفاده می‌شود. در نهایت، برای نزدیکی نتیجه به واقعیت، با ترکیب دو بخش، تخمین همه‌ی حالت‌ها و همه‌ی پارامترها به طور همزمان انجام شد تا از حالت‌های تخمین زده شده در هر لحظه‌ی زمانی برای تخمین پارامتر در همان لحظه از زمان استفاده شود. در نتیجه، مشاهده شد که هر دو روش ترکیبی EKF-RLS و UKF-RLS منجر به تخمین خوب و تقریبا یکسانی شدند. برای به‌کارگیری روش پیشنهادی این مقاله برای سایر سیستم‌ها، توجه به نکات زیر مفید است: (آ) محدودیت‌های به‌کارگیری روش‌های خانواده‌ی کالمن برای تخمین حالت‌ها، عبارتند از: (۱) داشتن مدل سیستم لازم است (که برای مثال این مقاله موجود است)؛ (۲) خطی بودن سیستم منجر به بهینگی تخمین می‌شود و برای سیستم‌های غیرخطی، باید نسخه‌های غیرخطی خانواده‌ی کالمن را به کار برد (که در اینجا هر دو روش EKF و UKF به کار برده شده‌اند و منجر به نتایج خوب تقریبا یکسانی شده‌اند؛ هرچند باید توجه داشت که روش UKF برای مواردی که با غیرخطی بودن شدید مواجهیم می‌تواند مناسب‌تر باشد)؛ (۳) برای بهینه بودن و بلکه واگرا نشدن الگوریتم تخمین، نویز باید (با تقریب خوبی) سفید و گاوسی با میانگین صفر باشد (که در این مقاله این گونه فرض شده است)؛ (ب) محدودیت به‌کارگیری روش کالمن برای تخمین پارامترها (روش کالمن افزوده)، عبارت است از این که تعداد پارامترهای مجهول نباید به قدری زیاد باشد که بردار حالت افزوده از رویت‌پذیری خارج شود (که در این مقاله از رویت‌پذیری خارج شد و برای رفع آن روش ترکیبی کالمن غیرخطی غیرافزوده با RLS پیشنهاد شد و مشکل حل شد؛ (ج) محدودیت‌های به‌کارگیری روش RLS برای تخمین پارامترها، عبارتند از: (۱) لازم است حالت‌های سیستم در دسترس باشد (که با روش ترکیبی پیشنهادی، تخمین حالت‌ها به روش کالمن در دسترس قرار گرفت)؛ (۲) معادله‌های غیرخطی سیستم باید به گونه‌ای باشند که (به شیوه‌ای مانند بخش ۴ همین مقاله) بتوان بردار رگرسیون را تشکیل داد؛ (۳) سیستم باید این امکان را داشته باشد که (به شیوه‌ای مانند بخش ۳-۲ همین مقاله) بتوان داده‌های مناسب را تولید کرد؛ (۴) برای بهینه بودن تخمین، نویز باید سفید و با میانگین صفر باشد. در نهایت، با توجه به این که بعضی محدودیت‌ها با روش ترکیبی پیشنهادی برطرف شده‌اند، اشتراک محدودیت‌های باقیمانده‌ی به‌کارگیری روش ترکیبی پیشنهادی به قرار (آ-۱)، (آ-۳) ، (ج-۲) و (ج-۳) هستند.

مراجع

[۱] م. نکوبخت، «آشکارسازی عیب عملگر و کنترل تحمل‌پذیر عیب برای پرنده هشت ملخه منتظم»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران، ۱۴۰۱.

[۲] م. براتی، «تخمین پارامترهای اکتاروتور با بکارگیری فیلتر کالمن توسعه یافته»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران، ۱۴۰۲.

[۳] م. صادقی، ر. هاونگی، «کنترل آنلاین سیستم ردیاب خورشیدی با استفاده از کنترل کننده PID تطبیقی مبتنی بر فیلتر کالمن»، نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران، دوره ۲۲، شماره ۲، ۱۴۰۲.

[۴] ا. ترکاشوند، ح. قاسمی، ف. امینی‌فر، «تخمین پارامترهای مدل کلاسیک ژنراتور با استفاده از داده های PMU»، نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران، دوره ۱۴، شماره ۱، صفحات ۷۳ تا ۸۲، ۱۳۹۶.

[۵] ن. صادق زاده نخودبریز، ب. سلطانی، م. پسند، ح. رادمنش، «فیلتر کالمن توسعه یافته جمعی چند نرخی تاخیردار برای تخمین وضعیت با ترکیب سنسورهای ژیروسکوپ و ستاره»، نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران، دوره ۲۰، شماره ۳، صفحات ۱۴۹ تا ۱۵۸، ۱۴۰۲.

[6] A. Kaba and E. Kıyak, "Optimizing a Kalman filter with an evolutionary algorithm for nonlinear quadrotor attitude dynamics", Journal of Computational Science, vol. 39, p. 101051, 2020.

[7] J. Zhao, X. Wang ,G. Gao, J. Na, H. Liu, and F. Luan, "Online adaptive parameter estimation for quadrotors," Algorithms, vol. 11, no. 11, p. 167, 2018.

[8] M. F. Sani, M. Shoaran, and G. Karimian, "Automatic landing of a low-cost quadrotor using monocular vision and Kalman filter in GPS-denied environments," Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences, vol. 27, no. 3, pp. 1821-1838, 2019.

[9] W. You, F. Li, L. Liao, and M. Huang, "Data fusion of UWB and IMU based on unscented Kalman filter for indoor localization of quadrotor UAV," Ieee Access, vol. 8, pp. 64971-64981, 2020.

[10] X. Chen, G. Zhang, C. Lu, and J. Cheng, "Quadrotor aircraft attitude control algorithm based on improved UKF," in IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2019, vol. 233, no. 4: IOP Publishing, p. 042037 .

[11] Y. Xu, Y. S. Shmaliy, X. Chen, Y. Li, and W. Ma, "Robust inertial navigation system/ultra wide band integrated indoor quadrotor localization employing adaptive interacting multiple model-unbiased finite impulse response/Kalman filter estimator," Aerospace Science and Technology, vol. 98, p. 105683, 2020.

[12] J. Gośliński, A. Kasiński, W. Giernacki, P. Owczarek, and S. Gardecki, "A study on coaxial quadrotor model parameter estimation: an application of the improved square root unscented Kalman filter," Journal of Intelligent & Robotic Systems, vol. 95, pp. 491-510, 2019.

[13] M. Rahmati, M. R. Arvan, and B. N. Araabi, "State estimation of VTOL octorotor for altitude control by using hybrid extended Kalman filter," in 2017 5th International Conference on Control, Instrumentation, and Automation (ICCIA), 2017: IEEE, pp. 189-194 .

[14] T. Chevet, M. Makarov, C. S. Maniu, I. Hinostroza, and P. Tarascon, "State estimation of an octorotor with unknown inputs. Application to radar imaging," in 2017 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC), 2017: IEEE, pp. 723-728 .

[15] R. Doraiswami, L. Cheded, and M. Brinkmann, "Kalman-Filter-Based Accurate Trajectory Tracking and Fault-Tolerant Control of Quadrotor," in Proceedings of the 8th International Conference of Control Systems, and Robotics (CDSR'21), Virtual Conference, 2021, pp. 23-25 .

[16] G. Rigatos, P. Siano, M. Abbaszadeh, and A. Monteriu, "A nonlinear optimal control approach for the autonomous octorotor," Advanced Control for Applications: Engineering and Industrial Systems, vol. 2, no. 3, p. e50, 2020.

[17] D. Merhy et al., "Guaranteed set-membership state estimation of an octorotor's position for radar applications," International Journal of Control, vol. 93, no. 11, pp. 2760-2770, 2020.

[18] A. Azarbani and R. Abbasi, "Optimal state estimation of air handling unit system without humidity sensor using unscented kalman filter," in 2019 6th International Conference on Control, Instrumentation and Automation (ICCIA), 2019: IEEE, pp. 1-6 .

[19] V. G. Adir and A. M. Stoica, "Integral LQR control of a star-shaped octorotor," Incas Bulletin, vol. 4, no. 2, p. 3, 2012.