

Synchronization of Chaotic Systems in the Presence of Order Uncertainty Using Projection Recurrent Neural Network based Sliding Mode Control

Abbas Kariminia¹, Hassan Zarabadipour²

¹ Ph.D. Student, Department of Electrical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran
abbas.kariminia@gmail.com

² Associate Professor, Department of Electrical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran
hzarabadi@eng.ikiu.ac.ir

Abstract:

In this paper, the synchronization of fractional-order chaotic Lorenz and Chen systems using a constrained optimal control approach has been investigated. The control algorithm consists of two operative loops where the instant estimation of fractional order using a numerical optimizer is carried out through the inner loop, while the control laws are generated using sliding mode control principal based on exponential reaching conditions. The proposed method to estimate the fractional order is based on forming linear regression for the fractional order equations of the Lorenz and Chen systems. The proposed algorithm has high performance in the presence of fractional order uncertainty in comparison with robust control approaches.

Keywords: Fractional-order chaotic system, Synchronization, Sliding mode control, Recurrent neural network, Uncertain fractional order

Article Type: Research

Received: 09. 06. 2022

Revised: 10. 12. 2022

Accepted: 23. 04. 2023

Corresponding author: H. Zarabadipour

Corresponding author's address: Department of Electrical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.



1. Motivation of the work

Due to the increasing expansion of the modeling done with the help of fractional dimension dynamics and also the use of these dynamics in the design of control systems, the need to analyze the behavior of fractional dimension systems is felt more than in the past. Analyzing the chaotic behavior of fractional dimension systems is one of the practical and new topics in this field. In recent years, chaos synchronization is an important issue in nonlinear systems due to its applications in laser physics, chemical reactors, secure telecommunications, and cryptographic systems. In this article, the combination of sliding mode control and projection recurrent neural network for the synchronization of two chaotic systems of Lorenz and Chen fractional order in the presence of uncertainty in order was investigated and the proposed algorithm for synchronization of chaotic systems was presented.

2. Contributions

In this article, the synchronization of chaotic systems in the presence of uncertainty in fractional order by combining sliding mode control and image feedback neural network was studied. The appropriate performance index was defined with the aim of linear regression estimation. The upper and lower bounds of the optimization variables were determined according to the range of fractional order changes. The proposed algorithm was designed in a suitable way so that it is able to follow momentary changes in the order of the fraction and in case of any uncertainty in it, it can update the control rules correctly and with the help of the neural network. In the proposed algorithm, there is no need to know the nominal value of the fractional order and the necessity of their being the same for the leader and follower systems.

3. Procedures

In this article, the proposed algorithm consists of two operational loops, inner and outer. In the inner loop, the momentary estimation of the fractional order is done with the help of a numerical optimizer, and in the outer loop, control rules are created based on the principles of sliding mode control and the final access condition. The proposed approach to estimate the fractional order is based on the formation of linear regression equations for Lorenz and Chen's fractional differential equations.

4. Finding

The simulation results showed that a robust control method is not necessarily able to maintain its performance against any type of uncertainty in a dynamic model. While the method proposed in this article is designed in such a way that it can show the momentary changes in fractional order correctly with the help of recurrent neural network. In the proposed method, image performance is used in a constrained

optimization program, which has resulted in a simple structure with high convergence speed for numerical estimator and fast tracking of fractional order. The guarantee of the convergence of the fractional order estimator is by using the Lyapunov theory, which enables the robust performance of the control system in the presence of fractional order uncertainty.

5. Conclusion

In this article, the integration of image recurrent neural network and sliding mode control was used to synchronize two chaotic systems of fractional order Lorenz and Chen in the presence of order uncertainty. First, the discrete time equations of Lorenz and Chen were described in the form of linear regression. Then, appropriate performance indicators were defined to estimate the order of deficits. By forming two bounded order programming, image recurrent neural networks were extracted. Control rules were determined based on exponential access conditions. The simulation results indicate the optimal performance of the proposed algorithm in synchronizing chaotic systems both in nominal conditions and in the presence of uncertainty in order.

همزمان سازی سیستم های آشوبناک در حضور نامعینی در مرتبه کسری به کمک کنترل مد لغزشی مبتنی بر شبکه عصبی بازگشتی تصویر

عباس کریمی نیا^۱، حسن زرآبادی پور^۲

۱- دانشجوی دکتری- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه بین المللی امام خمینی- قزوین- ایران

abbas.kariminia@gmail.com

۲- دانشیار- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه بین المللی امام خمینی- قزوین- ایران

hzarabadi@eng.ikiu.ac.ir

چکیده: در این مقاله، همزمان سازی سیستم های آشوبناک مرتبه کسری لورنز و چن در حضور نامعینی در مرتبه به کمک یک رویکرد کنترل بهینه مقید مورد بررسی قرار گرفته است. الگوریتم پیشنهادی متشکل از دو حلقه عملیاتی است، به طوری که در حلقه داخلی، تخمین لحظه ای مرتبه کسری به کمک یک بهینه ساز عددی صورت گرفته و در حلقه بیرونی، قوانین کنترلی بر اساس اصول کنترل مد لغزشی مبتنی بر شرط دسترسی نمایی تولید می شوند. رهیافت پیشنهادی برای تخمین مرتبه کسری بر مبنای تشکیل معادلات رگرسیون خطی برای معادلات مرتبه کسری لورنز و چن است. شاخص عملکردی با هدف تخمین رگرسیون خطی تعریف شده و کران بالا و پایین متغیرهای بهینه سازی نیز با توجه به محدوده تغییرات مرتبه کسری تعیین شده اند. در نتیجه، یک مسئله برنامه ریزی مرتبه دو مقید تشکیل شده و کمینه سازی آن به صورت لحظه ای توسط شبکه عصبی بازگشتی تصویر صورت می گیرد. این بهینه ساز با ساختاری ساده و برخورداری از پایداری مجانبی، قادر به تعیین متغیرهای بهینه با نرخ همگرایی بالا است. از تخمین مرتبه کسری برای به روز رسانی لحظه ای قوانین کنترلی استفاده می شود. الگوریتم پیشنهادی از کیفیت عملکرد بالایی در حضور نامعینی در مرتبه کسری به ویژه در قیاس با رویکردهای کنترلی مقاوم برخوردار است.

کلمات کلیدی: سیستم آشوبناک مرتبه کسری، همزمان سازی، کنترل مد لغزشی، شبکه عصبی بازگشتی، مرتبه کسری نامعین

نوع مقاله: پژوهشی

دریافت: ۱۴۰۱/۰۳/۱۹

بازنگری: ۱۴۰۱/۰۹/۱۹

پذیرش: ۱۴۰۲/۰۲/۰۴

نام نویسنده ی مسئول: دکتر حسن زرآبادی پور

نشانی نویسنده ی مسئول: ایران - قزوین - دانشگاه بین المللی امام خمینی - دانشکده مهندسی برق

۱- مقدمه

آشوب پدیده‌ای شناخته شده در حوزه‌های مختلفی چون مدارات الکتریکی، پل‌ها و ساختمان‌ها، آب‌وهوا و علم اقتصاد است. ویژگی اصلی هر پدیده آشوبناک، رفتار بی‌قاعده متغیر حالت آن است به طوری که سیستم در ظاهر ناپایدار است، حال آنکه از نظر داخلی پایدار است [۱]. مشخصه دیگر چنین سیستمی، حساسیت بالا به شرایط اولیه است. این مسئله به‌ویژه در مورد آب‌وهوا از اهمیت زیادی برخوردار است [۲]. در برخی کاربردها همچون مدارات الکتریکی، با انتخاب مقادیر خاصی برای سلف و خازن و مقاومت که منجر به شرایط اولیه مداری مختلف می‌شود، می‌توان شرایط آشوبناک را برای ولتاژ عناصر منفعل تحریک کرد [۳]. در سال‌های اخیر و با پیشرفت محاسبات مرتبه کسری، سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند. [۴]. چنین سیستم‌هایی از پیچیدگی بیشتری نسبت به سیستم‌های مرتبه صحیح برخوردار بوده و تحلیل پایداری، همزمان‌سازی و پیاده‌سازی عملیاتی آن به مراتب چالش برانگیزتر است. از جمله پرکاربردترین سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری در تحقیقات می‌توان به سیستم‌های لورنز (Lorenz)، چن (Chen) و لیو (Lu) اشاره کرد. از طرفی، تکنیک‌های کنترلی متنوعی در ادبیات موضوع برای پایداری و همزمان‌سازی و همزمان‌سازی عموم سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری توسعه یافته‌اند. کنترل مد لغزشی به دلیل قابلیت مقابله با عدم قطعیت به‌طور گسترده‌ای در این حوزه مورد استفاده قرار گرفته است. رویکردی مرسوم در این زمینه، کنترل مد لغزشی ترمینال با ویژگی همگرایی زمان محدود است. در [۵]، کنترل مد لغزشی انتگرالی ترمینال مرتبه کسری با هدف همزمان‌سازی دو سیستم آشوبناک لورنز توسعه یافته است. کران بالای عدم قطعیت به شیوه تطبیقی متناظر با پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته تخمین زده شده است. در [۶]، همگرایی زمان محدود متغیرهای یک سیستم پیرو به متغیرهای رهبر (چن-لیو) به کمک کنترل مد لغزشی مرتبه کسری مورد بررسی قرار گرفته است. از یک جبران‌ساز اغتشاش برای تضعیف اثرات ناشی از عدم قطعیت‌های مدل استفاده شده است. پایداری حلقه بسته در ترکیب قوانین کنترلی با جبران‌ساز اغتشاش تحلیل نشده است. بعلاوه، عدم قطعیت در مرتبه کسری بررسی نشده است. در [۷]، قوانین کنترل مد لغزشی به‌منظور همگرایی زمان محدود متغیرهای حالت سیستم لورنز روی سطح لغزش با تعیین کران بالای متغیرهای لغزشی، استخراج شده‌اند. در این رویکرد، سیستم‌های آشوبناک باید قابل تفکیک به دو بخش خطی و غیرخطی باشند. بعلاوه، قوام حلقه بسته به‌طور تحلیلی بحث نشده است. یک رویکرد همگرایی زمان محدود متشکل از کنترل مد لغزشی ترمینال و شبکه عصبی عمیق در [۸] برای همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبناک در حوزه مالی پیشنهاد شده است. عدم بررسی نامعینی در مرتبه کسری، پیچیدگی ساختار شبکه عصبی در تخمین بخش‌های غیرخطی و سرعت گذاری نسبتاً پایین در فرایند همزمان‌سازی از جمله عیوب این رویکرد است. در [۹]، برای یک سیستم

آشوبناک مرتبه کسری با تابع مشتق حافظه‌دار، روش همزمان‌سازی تطبیقی زمان محدود مبتنی بر تکنیک مد لغزشی توسعه یافته است. قوانین کنترلی با در نظر گرفتن پارامترهای نامعلوم مدل به استثنای مرتبه کسری با تعریف یک سطح لغزش انتگرالی تعیین شده‌اند. قوانین تطبیق پارامتر نیز به کمک تئوری لیاپانوف استخراج شده‌اند. این رویکرد برای مقابله با نامعینی‌های غیرپارامتری در مدل و مرتبه کسری مناسب نیست و امکان بروز چترینگ در آن وجود دارد. در [۱۰]، قانون کنترل مد لغزشی در ترکیب با تخمینگر انتگرالی عدم قطعیت برای پایداری و همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری چن-لیو توسعه یافته است. دینامیک تخمینگر به کمک یک تابع تبدیل فرکانسی مرتبه اول و اطلاعات لحظه‌ای سطح لغزش حاصل شده است. در این الگوریتم، امکان خطای انتگرالی به دلیل دینامیک سطح لغزش و تخمینگر و بروز اثرات چترینگ به دلیل توابع کلیدزنی وجود دارد. در [۱۱]، یک تخمینگر غیرخطی بر مبنای مدل تاکاگی-سوگنو و شبکه عصبی برای تخمین عدم قطعیت‌های پارامتری و غیرپارامتری سیستم آشوبناک جرک (Jerk) توسعه یافته است. از جمله عیوب این روش وابستگی به تجربه شخص خبره برای تعریف دقیق توابع عضویت فازی و قابلیت توسعه آن برای تنها برای سیستم‌های کانونیکال مرتبه کسری آشوبناک است. در [۱۲]، بخش‌های غیرخطی و شامل عدم قطعیت به کمک توابع پایه شعاعی تخمین زده شده‌اند. از ترکیب کنترل پسگام و کنترل مد لغزشی برای تحقق همزمان‌سازی بین دو سیستم آشوبناک استفاده شده است. این روش برای کلاسی از سیستم‌های کانونیکال قابل توسعه است. دینامیک تخمینگر تأخیر ورودی با تقریب تیلور به‌دست آمده است و اثرات خطای آن در پایداری حلقه بسته بررسی نشده است. بعلاوه، در برخی موارد همزمان‌سازی، تغییرات گذرای شدید و کوتاه مشاهده می‌شود. در [۱۳]، کنترل مد لغزشی مرتبه دو تطبیقی برای همزمان‌سازی دو سیستم آشوبناک توسعه یافته است که در آن، بهره‌های لغزشی به شیوه‌ای تطبیقی بروز می‌شوند. در این روش، تابع غیرخطی دینامیک به کمک تکنیک جدیدی به نام انتقال دیفرانسیل کسری است توصیف شده است. قانون کنترل همزمان‌ساز متشکل از تعدادی از قوانین تطبیق مبتنی بر سطح لغزش است. این روش به نامعینی در مرتبه کسری مقاوم نیست و تقریب ناشی از تابع انتقال دیفرانسیل کسری روی خطای حلقه بسته تأثیر می‌گذارد. در [۱۴] از قانون تطبیقی برای به‌روزرسانی سطح لغزش با فرض نامعلوم بودن کران بالای عدم قطعیت استفاده شده است. روش کنترلی تنها برای کلاس سیستم‌های قابل تفکیک به دو بخش خطی و غیرخطی قابل توسعه است. مسئله نامعینی در مرتبه کسری در آن بررسی نشده است و خطای همزمان‌سازی در نتایج شبیه‌سازی قابل توجه است. در [۱۵]، قانون تطبیق مرتبه کسری برای تخمین عدم قطعیت‌های سیستم لورنز توسعه یافته است که در آن، بهره‌های لغزشی در هر لحظه در راستای تضمین پایداری حلقه بسته بروز می‌شوند. این روش با وجود تحلیل ریاضی قوی تنها برای

از پیچیدگی بالایی به دلیل استفاده از سطح لغزشی شامل انتگرال و مشتقات خطا برخوردار است. نامعینی در مرتبه بررسی نشده و اگر کران بالای عدم قطعیت تغییر کند با افت عملکرد همراه می‌شود. یکی از چالش‌های اساسی در حوزه سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری، عدم قطعیت در مرتبه است. تعدادی کمی تحقیقات در زمینه تخمین مرتبه کسری متمرکز شده‌اند. در [۲۳]، از الگوریتم کلونی مورچگان مصنوعی ترکیبی با طرح یک مسئله بهینه‌سازی غیرخطی در سیستم آشوبناک چن استفاده شده است. این روش برای کاربردهای بی‌درنگ و پیاده‌سازی عملیاتی مناسب نیست و چگونگی تضمین همگرایی آن نیز با چالش همراه است. منطق فازی نیز می‌تواند برای تخمین مرتبه کسری بکار گرفته شود که در آن به شیوه بازگشتی می‌توان تمامی پارامترهای مورد نیاز سیستم لورنز را تخمین زد [۲۴]. مشکلات اساسی این تکنیک، وابستگی به تجربه شخص خبره برای تعیین قواعد فازی و دشواری تحلیل پایداری حلقه بسته به‌ویژه در حضور عدم قطعیت است.

در این مقاله، از شبکه عصبی بازگشتی تصویر برای تخمین لحظه‌ای مرتبه کسری در سیستم‌های آشوبناک لورنز (Lorenz) و چن (Chen) استفاده می‌شود. سپس، قوانین کنترل مد لغزشی با هدف هم‌زمان‌سازی دو سیستم رهبر و پیرو با دریافت تخمین مرتبه کسری، استخراج می‌شوند. معادلات زمان گسسته سیستم‌های مرتبه کسری به فرم رگرسیون خطی تبدیل و شاخص عملکردی با هدف تخمین صحیح آن تعریف می‌شود به‌طوری‌که با کمینه‌سازی آن می‌توان مرتبه کسری را تخمین زد. این شاخص به یک برنامه‌ریزی مرتبه دو مقید تبدیل می‌شود. بر اساس شرایط بهینگی، معادلات شبکه عصبی بازگشتی به‌عنوان بهینه‌ساز عددی استخراج می‌شود. از این شبکه‌ها برای برنامه‌ریزی خطی [۲۵]، برنامه‌ریزی مرتبه دو [۶۲]، برنامه‌ریزی غیرخطی [۲۷]، رباتیک [۲۸] و کنترل مدل پیش‌بین [۲۹] استفاده شده است. به کمک شروط دسترسی نمایی، قوانین کنترلی بر مبنای تخمین مرتبه کسری و رگرسیون خطی استخراج می‌شوند.

ادامه این مقاله به شرح زیر است: در بخش دوم، اشاره‌ای بر محاسبات مرتبه کسری می‌شود. فرم زمان گسسته سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری لورنز و چن در بخش سوم معرفی می‌شوند. در بخش چهارم، الگوریتم تخمین مرتبه کسری شامل رگرسیون خطی، برنامه‌ریزی مرتبه دو مقید و ساختار شبکه عصبی بازگشتی تصویر ارائه می‌شود. نحوه استخراج قوانین کنترل مد لغزشی برای تحقق هم‌زمان‌سازی در بخش پنجم تشریح می‌شود. بخش ششم و هفتم هم شامل نتایج شبیه‌سازی و نتیجه‌گیری هستند.

۲- محاسبات مرتبه کسری

با در نظر گرفتن $\Gamma(n) = (n-1)!$ ، انتگرال ریمان-لیوویل (Riemann-Liouville) برای $\alpha > 0$ را می‌توان به‌صورت زیر توصیف کرد [۳۰]:

پایدارسازی ارزیابی‌شده و قوام آن نسبت به عدم قطعیت در مرتبه کسری بررسی نشده است. در [۱۶]، کنترل مد لغزشی مبتنی بر تنها اطلاعات خطای هم‌زمان‌سازی برای سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری نامعین چن-لیو پیشنهاد شده است. به کمک تئوری لیاپانوف، همگرایی مجانبی سطح لغزش و پایداری معادلات دینامیکی خطا نشان داده شده است و عملکرد آن در رمزنگاری تصویر رنگی ارزیابی شده است. در این روش، نامعینی و کلاس نامعینی‌های غیرساختاریافته بررسی نشده و به دلیل استفاده از عملگر اشباع، حذف چترینگ با کاهش دقت عملکردی همراه است. در [۱۷]، بخش‌های نامعین سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری لورنز همراه با اغتشاشات خارجی و تأخیرهای زمانی به کمک یک تقریب زن مبتنی بر شبکه عصبی چیشو (Chebyshev) تخمین زده شده‌اند. قوانین مد لغزشی برای تضمین پایداری حلقه بسته استخراج و با قوانین تطبیق غیرخطی تلفیق شده‌اند. در این روش، پایداری حلقه بسته در ترکیب شبکه عصبی و کنترل مد لغزشی به‌طور تحلیلی ارزیابی نشده است و مسئله تأثیر خطای تخمین روی عملکرد کنترلی مورد توجه قرار نگرفته است. بعلاوه، نحوه مقابله با اثرات خطای تأخیر در مدل بحث نشده است.

در [۱۸]، کنترل مد لغزشی تطبیقی نوینی برای هم‌زمان‌سازی دو سیستم آشوبناک مرتبه کسری لورنز توسعه یافته است. ویژگی مهم این روش، قابلیت توسعه آن برای هم‌زمان‌سازی مرتبه کاهشیافته یا مرتبه افزایش‌یافته است. مشکل اساسی این روش تغییرات شدید گذرا در فرایند هم‌زمان‌سازی ناشی از قوانین تطبیق غیرخطی است. بعلاوه، قوام حلقه بسته نسبت به نامعینی‌های پارامتری و غیرساختاریافته بررسی نشده است. در [۱۹]، از توابع تانژانت هایپربولیک در تلفیق با کنترل مد لغزشی برای جبران‌سازی نوسانات آشوبناک در یک سیستم قدرت استفاده شده است. این روش نسبت به عدم قطعیت پارامتری به‌ویژه در مرتبه کسری مقاوم نیست. در [۲۰]، از کنترل مد لغزشی مستقل از چترینگ برای یک سیستم آشوبناک شامل پنج متغیر حالت استفاده شده است. در این روش، قوانین کنترلی شامل نرخ‌های مد لغزشی نوینی وابسته به سطح لغزش هستند. عیب اساسی این روش بروز نوسانات شدید در شرایط گذرا به دلیل سیر متغیر با زمان نرخ‌های مذکور است. اخیراً از رویکردهای کنترل مستخرج از داده بدون وابستگی به معادلات ریاضی سیستم نیز در این حوزه استفاده شده است. در [۲۱]، قانون کنترلی هم‌زمان‌ساز متشکل از تعدادی قوانین تطبیق مرتبه کسری برای سیستم لیو توسعه یافته است. تنها اطلاعات لازم برای تعیین سطح لغزش و اعمال فرامین کنترلی، خطای هم‌زمان‌سازی است. این روش از سرعت گذرای کندی برای هم‌زمان‌سازی برخوردار است و پیچیدگی آن به دلیل تعداد زیاد قوانین تطبیق مرتبه کسری بالا است. بعلاوه، از قوام پارامتری نسبت به مرتبه کسری برخوردار نیست. در [۲۲]، با فرض کران‌داری بخش‌های نامعین مدل غیرخطی آشوبناک مرتبه کسری و استخراج دینامیک خطای هم‌زمان‌سازی، قانون کنترل مد لغزشی تعیین شده است. قوانین کنترلی

با تعریف $t_n = nh$ که در آن h زمان نمونه‌برداری است، رابطه (۶) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$g_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} g_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, g_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{j=0}^n \gamma_j f(t_j, g_h(t_j)) \quad (10)$$

که در آن

$$\gamma_j = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j=n+1 \end{cases}$$

$$\xi_j = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha)$$

به کمک (۱۰)، معادلات زمان گسسته لورنز برابر است با

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= x_m(0) + \frac{h^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1+2)} \left(f_x^p(k+1) + \sum_{j=0}^k \gamma_{1,j} f_x(j) \right) \\ y_m(k+1) &= y_m(0) + \frac{h^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+2)} \left(f_y^p(k+1) + \sum_{j=0}^k \gamma_{2,j} f_y(j) \right) \\ z_m(k+1) &= z_m(0) + \frac{h^{\alpha_3}}{\Gamma(\alpha_3+2)} \left(f_z^p(k+1) + \sum_{j=0}^k \gamma_{3,j} f_z(j) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن

$$\begin{aligned} x_m^p(k+1) &= x_m(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \sum_{j=0}^k \xi_{1,j,n+1} f_x(j) \\ y_m^p(k+1) &= y_m(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \sum_{j=0}^k \xi_{2,j,n+1} f_y(j) \\ z_m^p(k+1) &= z_m(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_3)} \sum_{j=0}^k \xi_{3,j,n+1} f_z(j) \end{aligned} \quad (12)$$

به همین ترتیب برای سیستم آشوبناک چن داریم:

$$\begin{aligned} x_s(k+1) &= x_s(0) + \frac{h^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+2)} (g_x^p(k+1) + u_1(k) \\ &\quad + \sum_{j=0}^k \gamma_{1,j,n+1} (g_x(j) + u_1(j))) \\ y_s(k+1) &= y_s(0) + \frac{h^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+2)} (g_y^p(k+1) + u_2(k) \\ &\quad + \sum_{j=0}^k \gamma_{2,j,n+1} (g_y(j) + u_2(j))) \\ z_s(k+1) &= z_s(0) + \frac{h^{\beta_3}}{\Gamma(\beta_3+2)} (g_z^p(k+1) + u_3(k) \\ &\quad + \sum_{j=0}^k \gamma_{3,j,n+1} (g_z(j) + u_3(j))) \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن

$$\begin{aligned} x_s^p(k+1) &= x_s(0) + \frac{1}{\Gamma(\beta_1)} \sum_{j=0}^k \xi_{1,j,n+1} (g_x(j) + u_1(j)) \\ y_s^p(k+1) &= y_s(0) + \frac{1}{\Gamma(\beta_2)} \sum_{j=0}^k \xi_{2,j,n+1} (g_y(j) + u_2(j)) \\ z_s^p(k+1) &= z_s(0) + \frac{1}{\Gamma(\beta_3)} \sum_{j=0}^k \xi_{3,j,n+1} (g_z(j) + u_3(j)) \end{aligned} \quad (14)$$

در روابط فوق، بخش‌های غیرخطی به صورت زیر هستند:

$${}_{\ell}^{\alpha} f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > c, \alpha \in \mathbb{Z}^+ \quad (1)$$

به ازای D^n به عنوان عملگر مشتق مرتبه n ام و I به عنوان عملگر واحد، می‌توان نوشت:

$${}_{\ell}^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}, t > 0 \quad (2)$$

که در آن ${}_{\ell}^n D^n = I, {}_{\ell}^n D^n \neq I, n \in \mathbb{N}$ ، علاوه، $f^{(k)}(\cdot)$ مشتق مرتبه k ام تابع $f(\cdot)$ است. مشتق ریمان-لیوویل به ازای $\alpha \in \mathbb{R}^+$ برابر است با

$${}_R D^{\alpha} f(t) \triangleq \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \right] \quad (3)$$

که در آن $m-1 < \alpha < m$ و m یک اسکالر مثبت است. معادله (۳) را می‌توان به صورت توصیف کرد [۳۱]:

$$\begin{aligned} {}_L D^{\alpha} f(t) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0^+) t^{k-\alpha}}{\Gamma(m+1-\alpha)} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(m+1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن $m > \alpha - 1$. با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل مرتبه کسری $D^{\alpha} g(t) = f(t)$ ، مشتق کسری کاپوتو به صورت زیر بیان می‌شود:

$${}_c D^{\alpha} g(t) = {}_R D^{\alpha} \left[g(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} g^{(k)}(0^+) \right] = f(t) \quad (5)$$

که در آن $g^{(k)}(0^+) = b_k, k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ ، علاوه، انتگرال ولترا برای حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه کسری برابر است با

$$g(t) = \sum_{k=0}^{m-1} g_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s, g(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \quad (6)$$

که در آن $\Gamma(\alpha)$ تابع گاما است:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (7)$$

۳- معادلات مرتبه کسری لورنز و چن

مدل آشوبناک مرتبه کسری لورنز با معادلات زیر توصیف می‌شود [۳۲]:

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} x_m(t) &= a_1 (y_m(t) - x_m(t)) \\ D^{\alpha_2} y_m(t) &= x_m(t) (b_1 - z_m(t)) - y_m(t) \\ D^{\alpha_3} z_m(t) &= x_m(t) y_m(t) - c_1 z_m(t) \end{aligned} \quad (8)$$

معادلات زیر توصیف‌کننده سیستم آشوبناک چن هستند:

$$\begin{aligned} D^{\beta_1} x_s(t) &= a_2 (y_s(t) - x_s(t)) + u_1(t) \\ D^{\beta_2} y_s(t) &= (c_2 - a_2) x_s(t) - x_s(t) z_s(t) + c_2 y_s(t) + u_2(t) \\ D^{\beta_3} z_s(t) &= x_s(t) y_s(t) - b_2 z_s(t) + u_3(t) \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ مرتبه‌های کسری هستند. پارامترهای سیستم لورنز و چن به ترتیب شامل $a_1 = 10, b_1 = 28$ و $c_1 = 8/3, a_2 = 35, b_2 = 3, c_2 = 28$ هستند.

شروط آشوب عبارت هستند از $\alpha_{1,2,3} > 0.9941$ و $\beta_{1,2,3} > 0.88$.

که در آن

$$\begin{cases} \Delta x_m(k+1) = x_m(k+1) - x_m(k) \\ \Delta y_m(k+1) = y_m(k+1) - y_m(k) \\ \Delta z_m(k+1) = z_m(k+1) - z_m(k) \end{cases} \begin{cases} \Delta f_x^p(k+1) = f_x^p(k+1) - f_x^p(k) \\ \Delta f_y^p(k+1) = f_y^p(k+1) - f_y^p(k) \\ \Delta f_z^p(k+1) = f_z^p(k+1) - f_z^p(k) \end{cases}$$

رابطه فوق را می‌توان به فرم رگرسیون خطی زیر نوشت:

$$\Delta \mathbf{z}_m(k+1) = \chi_m \mathbf{F}_m(k) \quad (17)$$

$$\text{که در آن } \Delta \mathbf{z}_m(k+1) = \begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ \Delta y_m(k+1) \\ \Delta z_m(k+1) \end{bmatrix}, \mathbf{F}_m(k) = \begin{bmatrix} \Delta f_{xm}^p(k+1) + f_{mx}(k) \\ \Delta f_{ym}^p(k+1) + f_{my}(k) \\ \Delta f_{zm}^p(k+1) + f_{mz}(k) \end{bmatrix}$$

به‌طور مشابه، معادلات رگرسیون خطی سیستم چن برابر است با

$$\Delta \mathbf{z}_s(k+1) = \chi_s \mathbf{F}_s(k) \quad (18)$$

$$\text{که در آن } \chi_s = \frac{h^\beta}{\Gamma(\beta+2)} \text{ و}$$

$$\Delta \mathbf{z}_s(k+1) = \begin{bmatrix} \Delta x_s(k+1) \\ \Delta y_s(k+1) \\ \Delta z_s(k+1) \end{bmatrix}, \mathbf{F}_s(k) = \begin{bmatrix} \Delta g_x^p(k+1) + g_x(k) + u_1(k) \\ \Delta g_y^p(k+1) + g_y(k) + u_2(k) \\ \Delta g_z^p(k+1) + g_z(k) + u_3(k) \end{bmatrix}$$

با توجه به روابط (۱۷) و (۱۸)، بخش شامل مرتبه کسری مجهول بوده و به‌عنوان متغیر بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شود.

۴-۲- مسئله برنامه‌ریزی مرتبه دو مقید

پارامتر مرتبه کسری باید به‌گونه‌ای تعیین شود که معادله رگرسیون خطی متناظر آن، به‌درستی رفتار سیستم اصلی را توصیف کند. بر این اساس، شاخص عملکرد زیر برای سیستم لورنز در نظر گرفته می‌شود:

$$J_m = 0.5 \mathbf{E}_m^T \mathbf{Q}_m \mathbf{E}_m \quad (19)$$

که در آن $\mathbf{E}_m = \Delta \mathbf{z}_m(k+1) - \chi_m \mathbf{F}_m(k)$. علاوه، $\mathbf{Q}_m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ماتریس متقارن مثبت معین است. با حذف ترم‌هایی که به‌طور صریح به مرتبه کسری وابسته نیستند، رابطه (۱۹) به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$J_m = \frac{1}{2} p_m(k) \chi_m^2 + \phi_m(k) \chi_m \quad (20)$$

که در آن $p_m(k) = \mathbf{F}_m^T(k) \mathbf{Q}_m \mathbf{F}_m(k)$ ، $\phi_m(k) = -\Delta \mathbf{z}_m^T(k+1) \mathbf{Q}_m \mathbf{F}_m(k)$. با توجه به اینکه $0 < \alpha < 1$ است، کران بالا و پایین متغیر بهینه‌سازی χ_m به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \chi_m = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} = \frac{1}{\Gamma(2)} \quad (21)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \chi_m = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} = \frac{h}{\Gamma(3)}$$

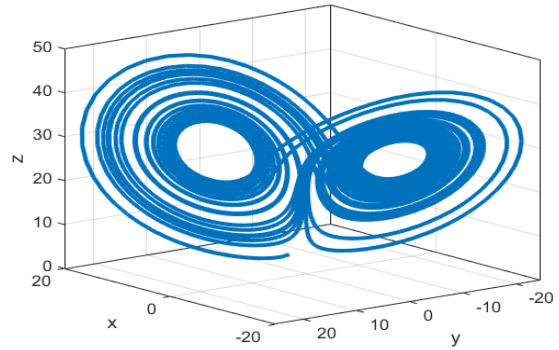
به‌عبارت دیگر، $\frac{h}{\Gamma(3)} < \chi < \frac{1}{\Gamma(2)}$. در این صورت، مسئله برنامه‌ریزی مرتبه دو مقید زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_{\chi_m} \quad & J_m = \frac{1}{2} p_m(t) \chi_m^2 + \phi_m(t) \chi_m(t) \\ \text{subject to} \quad & \frac{h}{\Gamma(3)} < \chi_m < \frac{1}{\Gamma(2)} \end{aligned} \quad (22)$$

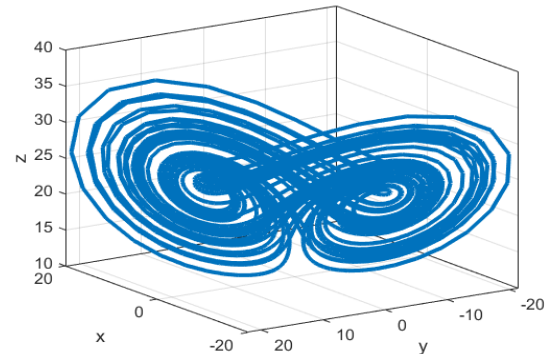
رابطه (۲۲) برای سیستم آشوبناک چن به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} f_x(k) = a_1(y_m(k) - x_m(k)) \\ f_y(k) = x_m(k)(b_1 - z_m(k)) - y_m(k) \\ f_z(k) = x_m(k)y_m(k) - c_1 z_m(k) \\ g_x(k) = a_2(y_s(k) - x_s(k)) \\ g_y(k) = (c_2 - a_2)x_s(k) - x_s(k)z_s(k) + c_2 y_s(k) \\ g_z(k) = x_s(k)y_s(k) - b_2 z_s(k) \end{cases} \quad (15)$$

رفتار سیستم‌های لورنز و چن به ازای شرایط اولیه $\mathbf{x}_m(0) = [2 \ 1 \ 4]$ و $\mathbf{x}_s(0) = [-9 \ -5 \ 14]$ در شکل‌های ۱ و ۲ مشاهده می‌شود.



شکل (۱): رفتار آشوبناک سیستم لورنز



شکل (۲): رفتار آشوبناک سیستم چن

۴- تخمین پارامتر مرتبه کسری

ایده اصلی تخمین مرتبه کسری، بازنویسی نرخ تغییرات متغیرهای حالت سیستم‌های آشوبناک برحسب معادلات رگرسیون خطی است. به کمک این توصیف می‌توان بخش معلوم و مجهول را تفکیک کرد و این نقش مهمی در تعیین مقدار بهینه مرتبه کسری دارد.

۴-۱- تشکیل رگرسیون خطی

با فرض $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ و $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $\gamma_{n+1}(k) = 1$.

در این صورت، با تعریف $\chi_m = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)}$ نرخ تغییرات متغیرهای حالت سیستم لورنز برابر است با

$$\begin{cases} \Delta x_m(k+1) = \chi_m [\Delta f_x^p(k+1) + f_x(k)] \\ \Delta y_m(k+1) = \chi_m [\Delta f_y^p(k+1) + f_y(k)] \\ \Delta z_m(k+1) = \chi_m [\Delta f_z^p(k+1) + f_z(k)] \end{cases} \quad (16)$$

$$\Pr_{\Omega}(z_a) = \begin{cases} \chi_{m \min} & \text{if } z_a < \chi_{m \min} \\ \chi_{m \max} & \text{if } z_a > \chi_{m \max} \\ z_a & \text{if } \chi_{m \min} \leq z_a \leq \chi_{m \max} \end{cases} \quad (32)$$

رابطه (۳۱) را می‌توان به شیوه زیر بازنویسی کرد:

$$\chi_m^*(t) = \Pr_{\Omega}(\chi_m^*(t) - \varpi_m(t)) \quad (33)$$

که در آن $\Pr_{\Omega}(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ معرف عملگر تصویر است [۲۶]:

$$\Pr_{\Omega}(\chi_m^*(t) - \varpi_m(t)) = \arg \min_{\vartheta \in \Omega} |\chi_m^*(t) - \varpi_m(t) - \vartheta(t)| \quad (34)$$

لم ۱: χ^* جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی مرتبه دو مقید در (۲۲) است، اگر و فقط اگر در تساوی زیر صدق کند [۲۶]:

$$\Pr_{\Omega}(\chi_m(t) - \varepsilon \nabla J_{Qpm}(\chi_m(t))) = \chi_m(t) \quad (35)$$

مطابق با لم ۱ و رابطه تصویر در (۳۳) برای یافتن جواب بهینه، کافی است که رابطه دیفرانسیلی زیر به نقطه تعادل خود همگرا شود:

$$\varepsilon \frac{d\varpi_m(t)}{dt} = -\chi_m(t) + \Pr_{\Omega}(\chi_m(t) - \varpi_m(t)) \quad (36)$$

جواب بهینه با بازنویسی رابطه (۲۷) به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\chi_m(t) = \frac{1}{p_m(t)}(\varpi_m(t) - \phi_m(t)) \quad (37)$$

بنابراین، معادلات شبکه عصبی بازگشتی تصویر برابر است با

$$\varepsilon \frac{d\varpi_m(t)}{dt} = -\chi_m(t) + \Pr_{\Omega}(\chi_m(t) - \varpi_m(t)) \quad (38)$$

$$\chi_m(t) = \frac{1}{p_m(t)}(\varpi_m(t) - \phi_m(t))$$

که در آن $\varepsilon > 0$ معرف نرخ همگرایی شبکه است. به‌طور مشابه، معادلات شبکه عصبی برای سیستم چن برابر خواهد بود با

$$\varepsilon \frac{d\varpi_s(t)}{dt} = -\chi_s(t) + \Pr_{\Omega}(\chi_s(t) - \varpi_s(t)) \quad (39)$$

$$\chi_s(t) = \frac{1}{p_s(t)}(\varpi_s(t) - \phi_s(t))$$

با کمینه‌سازی شاخص عملکرد زیر می‌توان مرتبه کسری را تخمین زد.

$$J_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\chi_m - \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} \right)^2 \quad (40)$$

۵- مسئله همزمان‌سازی

به‌منظور همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبناک لورنز و چن، نخست سطوح لغزش به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} s_x(k) = x_m(k) - x_s(k) \\ s_y(k) = y_m(k) - y_s(k) \\ s_z(k) = z_m(k) - z_s(k) \end{cases} \quad (41)$$

از طرفی، برای تضمین پایداری حلقه بسته، قانون دسترسی نمایی زمان گسسته زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} s_x(k+1) = s_x(k) - qhs_x(k) - \eta h \operatorname{sgn}(s_x(k)) \\ s_y(k+1) = s_y(k) - qhs_y(k) - \eta h \operatorname{sgn}(s_y(k)) \\ s_z(k+1) = s_z(k) - qhs_z(k) - \eta h \operatorname{sgn}(s_z(k)) \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \min_{\chi_m} \quad & J_s = \frac{1}{2} p_s(t) \chi_s^2(t) + \phi_s(t) \chi_s(t) \\ \text{subject to} \quad & \frac{h}{\Gamma(3)} < \chi_s < \frac{1}{\Gamma(2)} \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن

$$\chi_s = \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+2)}, p_s(k) = \mathbf{F}_s^T(k) \mathbf{Q}_s \mathbf{F}_s(k),$$

$$\phi_s(k) = -\Delta \mathbf{z}_s^T(k+1) \mathbf{Q}_s \mathbf{F}_s(k)$$

۴-۳- شبکه عصبی بازگشتی تصویر

به‌منظور کمینه‌سازی جداگانه (۲۲) و (۲۳)، از یک بهینه‌ساز عددی به نام شبکه عصبی بازگشتی تصویر استفاده می‌شود. تابع هزینه (۲۲) را می‌توان به صورت یک تابع زمانی وابسته به حالت زیر در نظر گرفت:

$$J_{Qpm}(\mathbf{x}, k) = \frac{1}{2} p_m(k) \chi_m^2(k) + \phi_m(k) \chi_m(k) \quad (24)$$

بردار قیود در (۲۲) را می‌توان در تابع برداری نامشبت زیر خلاصه کرد:

$$\mathbf{q}_m = \left[\chi_m - \frac{1}{\Gamma(2)} \quad -\chi_m - \frac{h}{\Gamma(3)} \right]^T \leq 0 \quad (25)$$

اگر (χ_m^*, μ_m^*) به ترتیب جواب بهینه و متغیر تصمیم‌گیری در فضای مقید باشند، بر اساس شرایط بهینگی می‌توان نوشت [۲۳]:

$$\nabla J_{Qpm}(\chi_m^*, k) + \nabla \mathbf{q}_m^T(\chi_m^*, k) \mu_m^* = 0, \quad \mu_m^* = [\mu_1 \quad \mu_2]^T \quad (26)$$

از طرفی بر اساس روابط (۲۴) و (۲۵) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \nabla J_{Qpm}(\chi_m, k) &= p_m(k) \chi_m(k) + \phi_m(k) \\ \nabla \mathbf{q}_m(\chi_m, k) &= [1 \quad -1]^T \end{aligned} \quad (27)$$

بر اساس (۲۶)، رابطه (۲۷) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$p_m(k) \chi_m^*(k) + \phi_m(k) + \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad (28)$$

با تعریف $\varpi_m := \mu_2 - \mu_1$ ، رابطه اخیر را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$p_m(k) \chi_m^*(k) + \phi_m(k) - \varpi_m = 0 \quad (29)$$

باید اشاره کرد که وقتی $\varpi_m(t) = 0$ است، متغیر بهینه‌سازی در فضای مقید می‌باشد. هر زمان که متغیر $\varpi_m(t)$ مثبت یا منفی باشد، بردار جستجو تمایل به خارج شدن از فضای بهینه‌سازی مقید دارد. بنابراین، ارتباط بین جواب بهینه و متغیر تصمیم‌گیری به صورت زیر است:

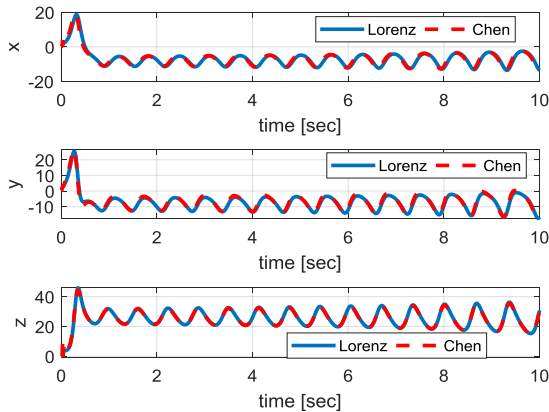
$$\begin{cases} \chi_m^* = \chi_{m \min} & \text{if } \varpi_m(t) > 0 \\ \chi_m^* = \chi_{m \max} & \text{if } \varpi_m(t) < 0 \\ \chi_{m \min} \leq \chi_m^* \leq \chi_{m \max} & \text{if } \varpi_m(t) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

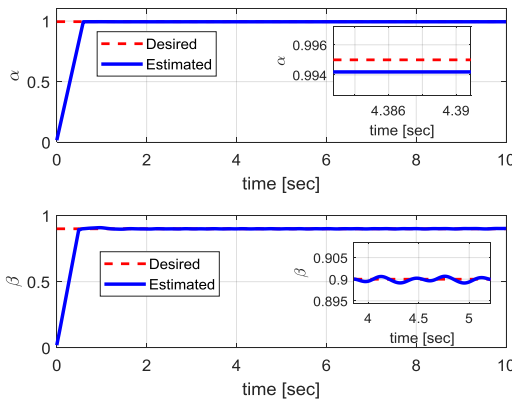
$$\chi_m^*(t) - \varpi_m(t) = \begin{cases} \chi_{m \min}, & \text{if } \chi_m^*(t) - \varpi_m(t) < \chi_{m \min} \\ \chi_{m \max}, & \text{if } \chi_m^*(t) - \varpi_m(t) > \chi_{m \max} \\ \chi_m^*(t) - \varpi_m(t), & \text{else} \end{cases} \quad (31)$$

با تعریف زیر

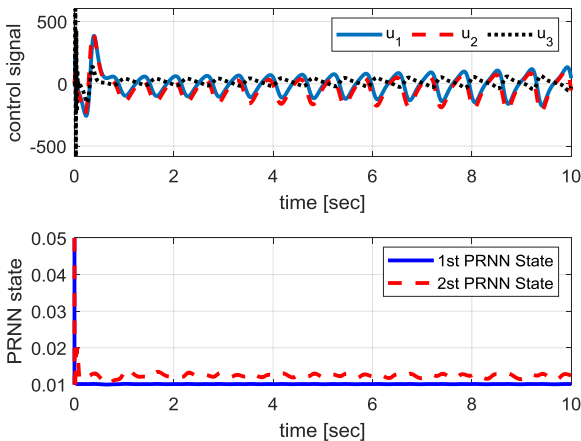
مربوط به متغیر Z است درحالی‌که ردیابی متغیر y با دقت کمتری همراه است. باید یادآور شد که این نتایج به ازای مصالحه‌ای بین دقت همزمان‌سازی و اجتناب از چترینگ و دامنه‌گذرای بالای سیگنال‌های کنترلی صورت گرفته است. با توجه به شکل ۵، مرتبه کسری هر دو سیستم لورنز و چن با دقت عملکرد خیلی بالایی توسط شبکه‌های عصبی بازگشتی تخمین زده شده‌اند. در شکل ۶، تغییرات سیگنال‌های کنترلی و متغیرهای حالت شبکه‌های عصبی مشاهده می‌شوند. در ادامه فرض می‌شود که مرتبه کسری سیستم لورنز از لحظه ۶ ثانیه به بعد به مقدار ۰٫۹ و برای سیستم چن از ثانیه ۵ به بعد به مقدار ۰٫۹۵ تغییر کنند. نتایج همزمان‌سازی در این بخش با رویکرد کنترل مد لغزشی تطبیقی (ASMC) در [۳۴] مقایسه شده است.



شکل (۴): همزمان‌سازی سیستم‌های لورنز و چن



شکل (۵): تخمین مرتبه‌های کسری سیستم‌های لورنز و چن



شکل (۶): سیگنال‌های کنترلی و متغیرهای شبکه عصبی بازگشتی

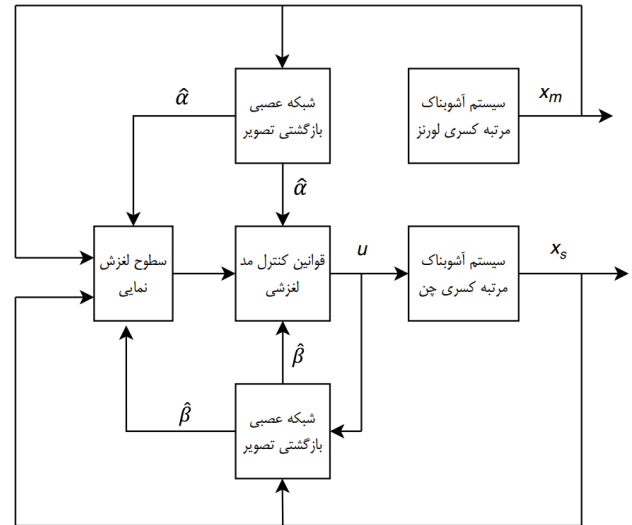
که در آن، h زمان نمونه‌برداری و q و η باید به گونه‌ای انتخاب شوند که $0 < hq < 1$ و $0 < \eta q$ از آنجایی که

$$\begin{cases} s_x(k+1) - s_x(k) = \Delta x_m(k+1) - \Delta x_s(k+1) \\ s_y(k+1) - s_y(k) = \Delta y_m(k+1) - \Delta y_s(k+1) \\ s_z(k+1) - s_z(k) = \Delta z_m(k+1) - \Delta z_s(k+1) \end{cases} \quad (43)$$

قوانین کنترلی برابر خواهند بود با

$$\begin{aligned} u_1(k) &= \frac{h^{\hat{\alpha}} \Gamma(\hat{\alpha} + 2)}{h^{\hat{\beta}} \Gamma(\hat{\alpha} + 2)} [\Delta f_x^p(k+1) + f_x(k)] - \Delta g_x^p(k+1) \\ &\quad - g_x(k) + \frac{\Gamma(\hat{\beta} + 2)}{h^{\hat{\beta}}} [qhs_x(k) + \eta h \operatorname{sgn}(s_x(k))] \\ u_2(k) &= \frac{h^{\hat{\alpha}} \Gamma(\hat{\alpha} + 2)}{h^{\hat{\beta}} \Gamma(\hat{\alpha} + 2)} [\Delta f_y^p(k+1) + f_y(k)] - \Delta g_y^p(k+1) \\ &\quad - g_y(k) + \frac{\Gamma(\hat{\beta} + 2)}{h^{\hat{\beta}}} [qhs_y(k) + \eta h \operatorname{sgn}(s_y(k))] \\ u_3(k) &= \frac{h^{\hat{\alpha}} \Gamma(\hat{\alpha} + 2)}{h^{\hat{\beta}} \Gamma(\hat{\alpha} + 2)} [\Delta f_z^p(k+1) + f_z(k)] - \Delta g_z^p(k+1) \\ &\quad - g_z(k) + \frac{\Gamma(\hat{\beta} + 2)}{h^{\hat{\beta}}} [qhs_z(k) + \eta h \operatorname{sgn}(s_z(k))] \end{aligned} \quad (44)$$

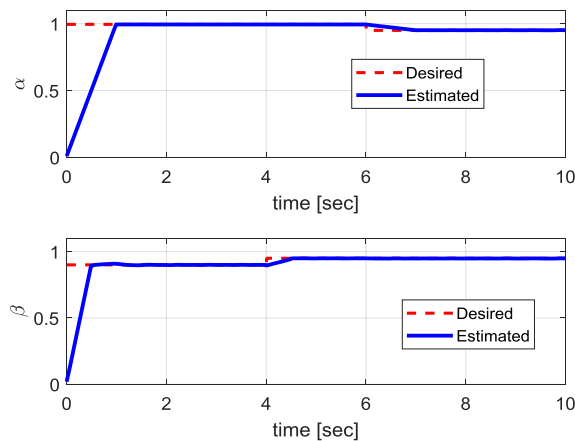
بلوک دیاگرام کنترلی در شکل ۳ مشاهده می‌شود. در حلقه‌های داخلی به کمک شبکه‌های عصبی بازگشتی، مرتبه کسری به طور لحظه‌ای تخمین زده می‌شود و در حلقه بیرونی، سیستم کنترلی برای همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبناک لورنز و چن تولید می‌شود.



شکل (۳): بلوک دیاگرام الگوریتم کنترل پیشنهادی

۶- نتایج شبیه‌سازی

برای شبیه‌سازی، زمان نمونه‌برداری برابر با ۱۰ میلی‌ثانیه و زمان شبیه‌سازی ۱۰ ثانیه در نظر گرفته شده است. پارامترهای کنترلی برابر با $q=4$ و $\eta=0.4$ در نظر گرفته شده‌اند. نرخ همگرایی بهینه‌ساز عددی برابر با 10^{-5} و مقدار وزنی $Q_m = Q_s = 10^4 \times I_{3 \times 3}$ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، متغیرهای حالت سیستم چن با دقت عملکرد نسبتاً خوبی قادر هستند که سیر حرکت متغیرهای حالت لورنز را دنبال کنند. بهترین همزمان‌سازی



شکل (۸): تخمین مرتبه‌های کسری سیستم‌های لورنز و چن

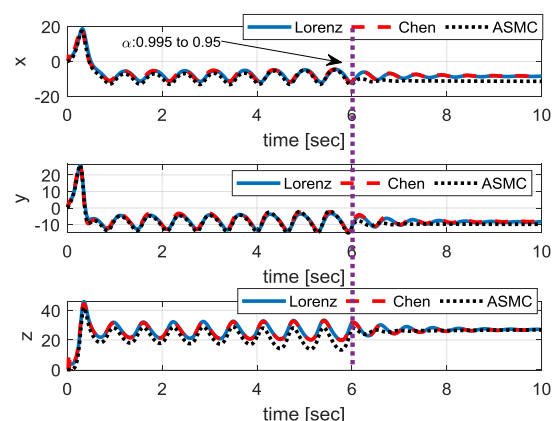
۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، از تلفیق شبکه عصبی بازگشتی تصویر و کنترل مد لغزشی برای همزمان‌سازی دو سیستم آشوبناک مرتبه کسری لورنز و چن در حضور نامعینی در مرتبه استفاده گردید. ابتدا معادلات زمان گسسته لورنز و چن به فرم رگرسیون خطی توصیف شد. سپس، شاخص‌های عملکرد مناسب برای تخمین مرتبه‌های کسری تعریف گردید. با تشکیل برنامه‌ریزی مرتبه دو مقید، شبکه‌های عصبی بازگشتی تصویر استخراج گردیدند. قوانین کنترل بر مبنای شروط دسترسی‌نمایی تعیین شدند. نتایج شبیه‌سازی دلالت بر عملکرد مطلوب الگوریتم پیشنهادی در همزمان‌سازی سیستم‌های آشوبناک هم در شرایط نامی و هم در حضور نامعینی در مرتبه دارد. در الگوریتم پیشنهادی، نیازی به آگاهی از مقدار نامی مرتبه کسری و لزوم یکسان بودن آنها در سیستم‌های رهبر و پیرو نیست.

مراجع

- [1] G.C. Layek, An introduction to dynamical systems and chaos (pp. 1-619). New Delhi: Springer, 2015. <https://doi.org/10.1007/978-81-322-2556-0>
- [2] G. Ye, "Image scrambling encryption algorithm of pixel bit based on chaos map", Pattern Recognition Letters, Vol. 31, 347-354, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2009.11.008>
- [3] Z.T. Njitacke, H. B. Fotsin, A. N. Negou, & D. Tchiotso, "Coexistence of multiple attractors and crisis route to chaos in a novel memristive diode bridge-based Jerk circuit", Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 91, 180-197, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.05.011>
- [4] I. Petráš, "A note on the fractional-order Volta's system", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 15, 384-393, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.04.009>
- [5] A. Modiri, & S. Mobayen, "Adaptive terminal sliding mode control scheme for synchronization of fractional-order uncertain chaotic systems", ISA transactions, Vol. 105, 33-50, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2020.05.039>
- [6] D. Deepika, S. Kaur, & S. Narayan, "Uncertainty and disturbance estimator based robust synchronization for a

همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، الگوریتم پیشنهادی قادر است بعد از بروز عدم قطعیت، عملکرد حلقه بسته را حفظ کند، درحالی‌که روش ASMC قادر به تحقق مسئله همزمان‌سازی در حضور نامعینی در مرتبه کسری نیست. بعلاوه، برخلاف ASMC در الگوریتم پیشنهادی نیاز به لزوم یکسان بودن مرتبه کسری سیستم‌های رهبر و پیرو نیست. روش ASMC نیاز به آگاهی از مقدار نامی مرتبه کسری دارد، درحالی‌که روش پیشنهادی مستقل از این مسئله می‌تواند همزمان‌سازی را تحقق بخشد. با توجه به شکل ۸، الگوریتم پیشنهادی قادر به ردیابی مرتبه کسری حتی با وجود تغییر در گذر زمان است. با توجه به نتایج شبیه‌سازی می‌توان این نتیجه ارزشمند را گرفت که لزوماً یک روش کنترلی مقاوم قادر به حفظ عملکرد خود در مقابل هر نوع عدم قطعیتی در یک مدل دینامیکی نیست. در ارتباط با یک سیستم آشوبناک مرتبه کسری، عدم قطعیت در مرتبه کسری ازجمله مواردی است که عموم رویکردهای کنترل مد لغزشی توسعه‌یافته در این حوزه قادر با مواجهه صحیح با اثرات منفی آن نیستند. این در حالی است که اصول طراحی پیشنهادشده در این مقاله به شیوه‌ای مناسب قادر است که تغییرات لحظه‌ای در مرتبه کسری را دنبال کرده و در صورت بروز هرگونه عدم قطعیت در آن، قوانین کنترلی را به صورت صحیح و به کمک شبکه‌های عصبی بازگشتی بروز نماید. بعلاوه، در رویکرد پیشنهادی، از عملکرد تصویر در یک برنامه بهینه‌سازی مقید استفاده‌شده است که منجر به ساختاری ساده با سرعت همگرایی بالا برای تخمینگر عددی شده که منجر به ردیابی سریع مرتبه کسری شده است. مسئله مهم، تضمین همگرایی تخمینگر مرتبه کسری به کمک تئوری لیپانوف است که موجب تضمین عملکرد مقاوم سیستم کنترلی در حضور عدم قطعیت مرتبه کسری می‌شود.



شکل (۷): همزمان‌سازی سیستم‌های لورنز و چن در حضور نامعینی

- sliding mode control", *Advances in Difference Equations*, Vol. 417, 1-17, 2020. <https://doi.org/10.1186/s13662-020-02876-7>
- [19] D. Zhu, W. Zhang, C. Liu, and J. Duan, "Fractional-Order Hyperbolic Tangent Sliding Mode Control for Chaotic Oscillation in Power System", *Mathematical Problems in Engineering*, 1-10, 2021, doi.org/10.1155/2021/6691941
- [20] Y. Tong, Z. Cao, H. Yang, C. Li, and W. Yu, "Design of a five-dimensional fractional-order chaotic system and its sliding mode control", *Indian Journal of Physics*, Vol. 96, 855-867, 2022. <https://doi.org/10.1007/s12648-021-02181-3>
- [21] Y. Chen, C. Tang, and M. Roohi, "Design of a model-free adaptive sliding mode control to synchronize chaotic fractional-order systems with input saturation: an application in secure communications", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 358, 8109-8137, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2021.08.007>
- [22] S. Z. Mirrezaei, A. Zare, & M. Hallaji, (2022). "A new fractional sliding mode controller based on nonlinear fractional-order proportional integral derivative controller structure to synchronize fractional-order chaotic systems with uncertainty and disturbances". *Journal of Vibration and Control*, Vol. 28(7-8), 773-785, 2022. <https://doi.org/10.1177/1077546320982453>
- [23] W. Gu, Y. Yu, and W. Hu, "Artificial bee colony algorithm-based parameter estimation of fractional-order chaotic system with time delay", *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, Vol. 4, 107-113, 2017. 10.1109/JAS.2017.7510340
- [24] A. Mohammadzadeh, and S. Ghaemi, "Optimal synchronization of fractional-order chaotic systems subject to unknown fractional order, input nonlinearities and uncertain dynamic using type-2 fuzzy CMAC", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 88, 2993-3002, 2017. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3427-z>
- [25] Q. Liu, and J. Wang, "A one-layer recurrent neural network with a discontinuous activation function for linear programming", *Neural Computation*, Vol. 20, 1366-1383, 2008. 10.1109/TNN.2007.910736
- [26] S. Liu, and J. Wang, "A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTa application", *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 17, 1500-1510, 2006. 10.1109/TNN.2006.881046
- [27] Y. Xia, J. Wang, and W. Guo, "Two projection neural networks with reduced model complexity for nonlinear programming", *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, Vol. 31, 2020-2029, 2019. 10.1109/TNNLS.2019.2927639
- [28] Hassan, A. A., El-Habrouk, M., and Deghedie, S., "Inverse kinematics of redundant manipulators formulated as quadratic programming optimization problem solved using recurrent neural networks: A review", *Robotica*, Vol. 38, 1495-1512, 2020. <https://doi.org/10.1017/S0263574719001590>
- [29] C. Liu, C. Li, and W. Li, "Computationally efficient MPC for path following of underactuated marine vessels using projection neural network", *Neural Computing and Applications*, Vol. 32, 7455-7464, 2020. <https://doi.org/10.1007/s00521-019-04273-y>
- [30] Y. Yu, H. X. Li, S. Wang, & J. Yu, "Dynamic analysis of a fractional-order Lorenz chaotic system", *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(2), 1181-1189, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2009.03.016>
- [31] K. Diethelm, N. J. Ford, and A. D. Freed, "A predictor-corrector approach for the numerical solution of class of uncertain fractional chaotic system via fractional order sliding mode control", *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 115, 196-203, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.07.028>
- [7] C. Song, S. Fei, J. Cao, & C. Huang, "Robust synchronization of fractional-order uncertain chaotic systems based on output feedback sliding mode control", *Mathematics*, Vol. 7, 599, 2019. <https://doi.org/10.3390/math7070599>
- [8] Y. L. Wang, H. Jahanshahi, S. Bekiros, F. Bezzina, Y. M. Chu, & A. A. Aly, "Deep recurrent neural networks with finite-time terminal sliding mode control for a chaotic fractional-order financial system with market confidence", *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 146, 110881, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110881>
- [9] L. Huang, W. Li, J. Xiang, & G. Zhu, "Adaptive finite-time synchronization of fractional-order memristor chaotic system based on sliding-mode control", *The European Physical Journal Special Topics*, Vol. 231, 3109-3118, 2022. <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-022-00564-z>
- [10] D. Deepika, "Hyperbolic uncertainty estimator based fractional order sliding mode control framework for uncertain fractional order chaos stabilization and synchronization", *ISA transactions*, Vol. 123, 76-86, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2021.05.036>
- [11] R. Wang, Z. YunNing, Y. Chen, X. Chen, and X. Lei, "Fuzzy neural network-based chaos synchronization for a class of fractional-order chaotic systems: an adaptive sliding mode control approach", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 100, 1275-1287, 2020. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05574-x>
- [12] T. Chen, H. Yang, and J. Yuan, "Event-Triggered Adaptive Neural Network Backstepping Sliding Mode Control for Fractional Order Chaotic Systems Synchronization With Input Delay", *IEEE Access*, Vol. 9, 100868-100881, 2021. 10.1109/ACCESS.2021.3097159
- [13] Z. Sun, "Synchronization of fractional-order chaotic systems with non-identical orders, unknown parameters and disturbances via sliding mode control", *Chinese Journal of Physics*, Vol. 56, 2553-2559, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2018.08.007>
- [14] V. Vafaei, H. Kheiri, and A. J. Akbarfam, "Synchronization of fractional-order chaotic systems with disturbances via novel fractional-order integer integral sliding mode control and application to neuron models", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 42, 2761-2773, 2019. <https://doi.org/10.1002/mma.5548>
- [15] J. Jiang, D. Cao, and H. Chen, "Sliding mode control for a class of variable-order fractional chaotic systems", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 357, 10127-10158, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2019.11.036>
- [16] M. Taheri, C. Zhang, Z. R. Berardehi, Y. Chen, & M. Roohi, "No-chatter model-free sliding mode control for synchronization of chaotic fractional-order systems with application in image encryption". *Multimedia Tools and Applications*, 1-31, 2022. <https://doi.org/10.1007/s11042-022-12329-w>
- [17] Y. Gu, J. Sun, & X. Fu, "A Novel Robust Neural Network Sliding-Mode Control Method for Synchronizing Fractional Order Chaotic Systems in the Presence of Uncertainty, Disturbance and Time-Varying Delay", *Journal of Electrical Engineering & Technology*, 1-11, 2022. <https://doi.org/10.1007/s42835-022-01225-w>
- [18] M. M. Al-sawalha, "Synchronization of different order fractional-order chaotic systems using modify adaptive

- fractional differential equations”, Nonlinear Dynamics, Vol. 29, 3-22, 2002.
<https://doi.org/10.1023/A:1016592219341>
- [32] M. Pourmahmood, S. Khanmohammadi, and G. Alizadeh, “Synchronization of two different uncertain chaotic systems with unknown parameters using a robust adaptive sliding mode controller”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 16, 2853-2868, 2021.
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.09.038>
- [33] D. Kinderlehrer, and G. Stampacchia, An introduction to variational inequalities and their applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
<https://doi.org/10.1137/1023111>
- [34] A. Modiri, and S. Mobayen, “Adaptive terminal sliding mode control scheme for synchronization of fractional-order uncertain chaotic systems”, ISA transactions, Vol. 105, 33-50, 2020.
<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2020.05.039>
- [35] Salimi M. A novel approach for sliding mode controller design and parameters selection in flyback switching power supplies . Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers 2019; 16 (3) :1-12
- [36] badi A, vali A, behnamgol V. Acceleration autopilot design using backstepping adaptive second-order sliding mode for pitch channel Flying object. Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers 2020; 17 (3) :51-62

زیر نویس ها

- ¹ Chaotic system
² Neural network
³ Synchronization
⁴ Sliding Mode Control
⁵ Fractional order
⁶ Optimal
⁷ Recurrent
⁸ Uncertainty