تخمین جهت منابع با استفاده از زیرفضای ختری-رائو

سینا مجیدیان[1] فرزان حدادی[2]

۱- کارشناسی ارشد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه علم و صنعت ایران-تهران- ایران

s_majidian@elec.iust.ac.ir

۲- استادیار- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه علم و صنعت ایران-تهران- ایران

farzanhaddadi@iust.ac.ir

چکیده: این مقاله به بررسی تخمین جهت منابع با استفاده آرایه خطی می‌پردازد. در حالتی که تعداد منابع بیشتر از تعداد عناصر آرایه است، روش زیرفضای ختری-رائو مختص منابع شبه‌ایستان معرفی‌شده است. در این مقاله اثبات می‌شود که این روش برای منابع ایستان نیز کارایی دارد. بحث یکتایی جواب برای مسئله تخمین جهت منابع بررسی‌شده و شروطی برای حالت‌های مختلف ارائه خواهد شد. علاوه بر این کران کرامر-رائو برای حالتی که تعداد منابع بیشتر از تعداد عنصر آرایه می‌باشد، محاسبه خواهد شد. همچنین نتایج حاکی از آن است که عملکرد روش ختری-رائو از نظر خطا در حدود 3dB با کران کرامر-رائو فاصله دارد.

کلمات کلیدی: پردازش سیگنال آرایه‌ای، تخمین جهت منبع، منابع ایستان، ختری-رائو

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۴/۶/۱۶

تاریخ پذیرش مشروط مقاله: ۱۳۹۵/۹/۱

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۹/۲۰

نام نویسنده‌ی مسئول: دکتر فرزان حدادی

نشانی نویسنده‌ی مسئول: ایران – تهران –نارمک-دانشگاه علم و صنعت - دانشکده مهندسی برق.

[Downloaded from jiaeee.com on 2026-10-30]

[DOR: 20.1001.1.26765810.1396.14.2.4.7]

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers Vol14 No.2Summer 2017

۱- مقدمه

یکی از کاربردهای بسیار مهم آرایه‌ای از آنتن‌ها تخمین جهت منابع می‌باشد. از دیرباز روش‌های شکل‌دهی پرتو[۱] وبعد از آن روش‌های مبتنی بر زیرفضا برای حل این مساله ارائه شده اند. برای نمونه از روش‌های شکل‌دهی پرتو می‌توان از کاپون[۲]، بارتلت[۳] نام برد. همچنین یکی از روش‌های مهم زیرفضایی میوزیک[۴] است. محدودیت مهم روش میوزیک حداکثر تعداد منابع قابل تخمین است[۱-۲]. این محدودیت به علت محدود بودن فضای سیگنال دریافتی به تعداد عناصر آرایه (آنتن‌ها) می‌باشد. از آنجایی که روش میوزیک به جداسازی زیرفضای سیگنال از نویز می‌پردازد، می‌بایست حداقل یک بعد فضا، سیگنال نباشد، بدین‌ترتیب حداکثر تعداد منابع قابل تخمین توسط این روش به $p-1$ می‌رسد، که p تعداد عناصر آرایه است [۲،۱۶].

برای بهبود این محدودیت، روش ختری-رائو[۵] [۳]، آرایه تودرتو[۶] [۴]، آرایه غیرصحیح[۷] [۵]، آرایه پویا[۸] [۶]، استفاده از حسگری فشرده[۱۵، ۱۸-۲۱]، همچنین برای آرایه‌ی نسخه دوبعدی روش ختری-رائو [۱۴، ۱۷] ، ارائه شده است. تمرکز این مقاله بر روش ختری-رائو است. این روش برای منابع شبه‌ایستان معرفی شده است. در این مقاله کارایی روش برای منابع ایستان مورد بحث قرار خواهد گرفت.

از آنجایی که عملکرد هر تخمینی را می توان با خطای آن سنجید، ارائه کردن کران پایینی برای خطا بسیار مفید است. کران کرامر-رائو (CRB)[۹] بدین‌منظور معرفی شده است. هرچه خطای تخمین به این کران نزدیک‌تر باشد تخمین‌گر بهتری از دید خطا خواهد بود[۷]. کران کرامر-رائو برای مساله تخمین جهت منابع انجام شده است [۸]. این محاسبه در شرایطی که تعدادِ منابع کمتر از تعداد عناصر آرایه است، کارایی دارد. برای برطرف کردن این محدودیت راهکاری نوین در شرایطی می‌دانیم منابع ناهمبسته هستند، ارائه خواهد شد.

مباحث ارائه شده در این مقاله به صورت مقابل است: در بخش بعدی، پژوهش‌های پیشین مرور خواهد شد. مدل مساله‌ی تخمین جهت، روش میوزیک و روش ختری-رائو ارائه می‌شود. در بخش سوم یکتایی جواب مساله تخمین جهت منبع بررسی شده و در ادامه یکتایی بر مدل ختری-رائو اعمال می‌گردد. در بخش بعد، کارایی روش ختری-رائو برای منابع ایستان تحلیل و اثبات شده است. در بخش پنجم کران کرامر-رائو برای این مساله معرفی و اصلاح خواهد شد. در پایان با ارائه چندین شبیه‌سازی به تحلیل عملکرد روش‌های ارائه شده می‌پردازیم.

۲- مبانی مساله

یک آرایه شامل p آنتن در نظر بگیرید که q جبهه موج صفحه‌ای بر آن وارد می‌شوند. پارامتر بسیار مهم برای منابع میدان‌دور جهت آن است. منابع از جهات θ_k که $k=1,\dots,q$ بر آرایه وارد می‌شوند. مدل مساله تخمین جهت منابع به صورت زیر خواهد بود:

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{k=1}^{q}\boldsymbol{a}(\theta_k)\boldsymbol{s}_k(t)+\boldsymbol{n}(t) \qquad (۱)$$

که در آن $\boldsymbol{a}(\theta_k)$ شامل برداری با p مقدار می‌باشد:

$$\boldsymbol{a}(\theta_k)=\left[e^{2\pi i\frac{d_1}{\lambda}\sin(\theta_k)} \quad \dots \quad e^{2\pi i\frac{d_p}{\lambda}\sin(\theta_k)}\right]^T \qquad (۲)$$

که در آن d_pمکان عنصر آرایه pام می‌باشد. همچنین با فرض

$$\boldsymbol{A}(\theta)=\left[\boldsymbol{a}(\theta_1),\dots,\boldsymbol{a}(\theta_q)\right]_{(p\times q)} \qquad (۳)$$

$$\boldsymbol{s}(t)=\left[s_1(t),\dots,s_q(t)\right]^T \qquad (۴)$$

بدین‌ترتیب به صورت زیر می‌توان نوشت [۱]:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{n}(t) \qquad (۵)$$

که در آن $\boldsymbol{A}(\theta)$ ماتریس جاروب آرایه[۱۰] است. با استفاده از تعریف ماتریس همبستگی خواهیم داشت :

$$\boldsymbol{R}_x=E[\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^H]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{A}^H+\boldsymbol{R}_n \qquad (۶)$$

که در آن $\boldsymbol{R}_s$ و $\boldsymbol{R}_n$ به ترتیب ماتریس همبستگی منابع و نویز است. همچنین H نماد ترانهاده‌ی مزدوج مختلط است.

۲-۱- روش میوزیک

میوزیک یکی از متداول‌ترین روش‌ها در تخمین جهت منابع است. با استفاده از تجزیه مقدارویژه برای $\mathbf{R}_x$، برداروِیژه‌ی متناظر با $p-q$کوچکترین مقدارویژه‌ی آن به عنوان زیرفضای نویز مشخص می‌کنیم:

$$\boldsymbol{V}_n=[\boldsymbol{q}_{q+1},..,\boldsymbol{q}_p] \qquad (۷)$$

آنگاه طیف میوزیک به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$P_{\mathrm{MUSIC}}(\theta)=\frac{1}{\boldsymbol{a}^H(\theta)\boldsymbol{V}_n\boldsymbol{V}_n{}^H\boldsymbol{a}(\theta)} \qquad (۸)$$

در این صورت جهت منابع DOA، qقله در طیف بالا می‌باشد.

۲-۲- روش ختری-رائو

در این بخش روش ختری-رائو به صورت مروری ارائه می‌گردد[۳]. منابع ناهمبسته و شبه‌ایستان در نظر گرفته می‌شود، که به معنای ثابت بودن واریانس منبع در هر فریم می‌باشد.

$$E[|s_i(t)|^2]=r_i^{(m)} \qquad (۹)$$

$$t\in[(m-1)K\,,mK-1] \quad m=1,\dots,M \qquad (۱۰)$$

که در آن $s_i(t)$ سیگنال منبع i ام است. K و M به ترتیب طول فریم و تعداد فریم می‌باشد. برای فریم m ام، ماتریس همبستگی سیگنال دریافتی به صورت زیر خواهد بود:

$$\boldsymbol{R}_x^{(m)}=E[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}(t)^H]\in\mathbb{C}^{p\times p} \qquad (۱۱)$$

$$\forall\, t\in[(m-1)K\,,mK-1] \qquad (۱۲)$$

همچنین با استفاده از تعریف ماتریس همبستگی، داریم:

$$\boldsymbol{R}_x^{(m)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_s^{(m)}A^H+\boldsymbol{R}_n \qquad (۱۳)$$

که در آن $\boldsymbol{R}_s^{(m)}$ ماتریس همبستگی منبع است. از آنجایی که منابع ناهمبسته فرض شده‌اند، $\boldsymbol{R}_s^{(m)}$قطری خواهد بود:

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.14- No.2 Summer 2017

[Downloaded from jiaeee.com on 2026-10-30]

[DOR: 20.1001.1.26765810.1396.14.2.4.7]

$$\boldsymbol{R}_s^{(m)} = \text{diag}\left(r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots, r_q^{(m)}\right) \quad (۱۴)$$

ماتریس همبستگی به صورت زیر برای هر فریم ستونی سازی[۱۱] می‌شود:

$$\boldsymbol{y}_m \triangleq \text{vec}\left(\boldsymbol{R}_x^{(m)}\right) = \text{vec}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_s^{(m)}\boldsymbol{A}^H\right) + \text{vec}(\boldsymbol{R}_n) \quad (۱۵)$$

حال از خواص ضرب ختری-رائو استفاده می‌کنیم:

$$\boldsymbol{y}_m = (\boldsymbol{A}^* \odot \boldsymbol{A})\boldsymbol{r}_m + \text{vec}(\boldsymbol{R}_n) \quad (۱۶)$$

که در آن $^*(.)$و $\odot$ به ترتیب نماد مزدوج مختلط و ضرب ختری-رائو می‌باشند. $\boldsymbol{r}_m$ عناصر قطری ماتریس همبستگی منبع هستند:

$$\boldsymbol{r}_m = [r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots, r_q^{(m)}]^T \quad (۱۷)$$

حال با کنار هم گذاشتن $\boldsymbol{y}_m$ برای $m = 1, \dots, M$، $\boldsymbol{Y}$ تشکیل می‌شود:

$$\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_M] \quad (۱۸)$$

به سادگی نشان داده می‌شود که $\boldsymbol{Y}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{A}^* \odot \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{\psi} + \text{vec}(\boldsymbol{R}_n)\,\mathbf{1}_M^T \quad (۱۹)$$

$$\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_M] = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{q1} & \cdots & r_{qM} \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

که در آن $\mathbf{1}_M^T$ ستونی از یک، به تعداد Mمی‌باشد. به علت شبه‌ایستان بودن منابع، $[\boldsymbol{\psi}\mathbf{1}_M^T]$ رتبه کامل است. در این شرایط از تصویر[۱۲] می‌توان برای حذف نویز استفاده کرد:

$$\boldsymbol{P}^{\perp} = \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{M}} - \frac{1}{M}\mathbf{1}_M\mathbf{1}_M^T \quad (۲۱)$$

خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{P}^{\perp} = [(\boldsymbol{A}^* \odot \boldsymbol{A})\boldsymbol{\psi} + \text{vec}(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}})\mathbf{1}^T{}_{Lf}\,]\boldsymbol{P}^{\perp} = (\boldsymbol{A}^* \odot \boldsymbol{A})(\boldsymbol{P}^{\perp}\boldsymbol{\varphi}^T)^T \quad (۲۲)$$

حال برای $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{P}^{\perp}$ تجزیه مقدار تکین[۱۳] انجام داده تا برای تخمین جهت منبع از میوزیک استفاده شود:

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{P}^{\perp} = [\boldsymbol{U}_s\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{n}}]\begin{bmatrix}\Sigma_s & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_s^H\\ \boldsymbol{V}_n^H\end{bmatrix} \quad (۲۳)$$

که در آن عناصر روی قطر Σ_s مقادیر ویژه، $\boldsymbol{U_n}$ و $\boldsymbol{V_n^H}$ برداروِیژه راست و چپ مربوط به مقادیر ویژه صفر هستند. با استفاده از رابطه ذیل می‌توان تخمین جهت را انجام داد [۳]:

$$\boldsymbol{U_n^H}\left(\boldsymbol{a}^*(\theta)\otimes\boldsymbol{a}(\theta)\right) = 0 \quad (۲۴)$$

۳- یکتایی در مساله تخمین جهت منبع

بحث مهم در تخمین جهت منابع با استفاده از پردازش آرایه‌ای، یکتایی جواب می‌باشد. در واقع هدف یافتن شرایطی است که در آن بتوان به صورت یکتا جهت منابع را تخمین زد. این مساله برای آرایه‌ی خطی یکنواخت توسط برسلر[۱۴] مورد بررسی قرار گرفته بود [۹]. درسال ۱۹۸۹ وکس و زیسکیند[۱۵] برای هر نوع آرایه‌ای شرایط کافی یکتایی را ارائه کرده‌اند [۱۰].

این مساله در سه حالت مختلف شامل: یکتایی برای هر مجموعه داده[۱۶]، تقریبا هر مجموعه داده[۱۷] و حالت مشروط ارائه شده است [۱۱-۱۲]. در ابتدا پژوهش مذکور مرورشده، سپس یکتایی جواب روش‌های ختری-رائو که تا کنون بررسی نشده است، محاسبه و ارائه می‌شود.

۳-۱- تئوری

مدل ارائه شده در (۵) را می توان به صورت ماتریسی نیز نشان داد:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{S} + \boldsymbol{N} \quad (۲۵)$$

که در آن

$$\boldsymbol{A}(\theta) = \left[a(\theta_1), \dots, a\left(\theta_q\right)\right]_{(p\times q)} \quad (۲۶)$$

$$\boldsymbol{S} = \left[\boldsymbol{S}_1, \dots, \boldsymbol{S}_q\right]^T \quad (۲۷)$$

ابتدا فرض می‌کنیم

$$\eta = \text{rank}\{\boldsymbol{S}\} \quad (۲۸)$$

پس

$$\text{rank}\{\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^H\} = \eta \quad (۲۹)$$

قضیه ۱: (برای هر مجموعه داده) یک آرایه می‌تواند تا q منبع را به طور یکتا تخمین بزند اگر [۱۰]:

$$q < \frac{\eta + p}{2} \quad (۳۰)$$

قضیه ۲: (برای تقریبا هر مجموعه داده) یک آرایه می‌تواند تا q منبع را به طور یکتا تخمین بزند اگر[۱۰]:

$$q < \frac{2\eta}{2\eta + 1}p \quad (۳۱)$$

۳-۲- یکتایی روش ختری-رائو برای هر مجموعه داده

یکی از نوآوری‌های این پژوهش محاسبه شرایط یکتایی جواب مسئله ختری-رائو می‌باشد. در این بخش شرایطی که در آن جواب مسئله برای هر محموعه از داده یکتا می‌باشد، مطرح می‌کنیم. از آنجایی که تصویر تأثیری بر مساله یکتایی ندارد، از آن صرف نظر می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^* \odot \boldsymbol{A} \quad (۳۲)$$

برای سیگنال دریافتی، جهت منبع یکتا خواهد بود، اگر داشته باشیم:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}')\boldsymbol{\psi}' \quad (۳۳)$$

و به طور معادل

$$[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}) \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}')]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}\\ -\boldsymbol{\psi}'\end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (۳۴)$$

برای برقراری این می‌بایست:

$$\zeta = \text{null}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{\theta})] < V = \text{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}\\ -\boldsymbol{\psi}'\end{bmatrix} \quad (۳۵)$$

از آنجایی که

$$V \geq \eta = \text{rank}\,[\boldsymbol{\psi}] \quad (۳۶)$$

آنگاه کافی است که $\zeta < \eta$.

اکنون دو افراز برای d وابسته به تعداد تکرار جهت مساوی در دو دسته جواب در نظر می‌گیریم

[Downloaded from jiaeee.com on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.26765810.1396.14.2.4.7]
Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers Vol14 No.2Summer 2017

$$d = \#\,\text{pair}\{\theta_i = \theta_j\} \quad (۳۷)$$

حالت یک: $d < 2q - (2p-1)$

از آنجایی که

$$\zeta = 2q - \text{rank}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}) \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}')] \quad (۳۸)$$

و $\text{rank}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})]$ برابر حداقل ابعاد آن یعنی $\{q, 2p-1\}$ است.داریم

$$\zeta = 2q - \min\{2p-1, 2q-d\} \quad (۳۹)$$

پس برای برقرار بودن $\zeta < \eta$ باید داشته باشیم:

$$q < \frac{\eta + 2p - 1}{2} \quad (۴۰)$$

حالت دو: $d > 2q - (2p-1)$

در ابتدا ستون مربوط به جهت‌های مساوی $\theta_i = \theta_j$ را حذف نموده و آن را $\overline{\boldsymbol{B}}$ می‌نامیم

$$\zeta = (2q-d) - \text{rank}[\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\theta})\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\theta}')] = 0 \quad (۴۱)$$

از آنجایی که $V > 0$، پس همواره $\zeta < V$.

۳-۳- یکتایی روش ختری-رائو برای تقریبا هر مجموعه داده

حال یکتایی را برای هر مجموعه داده‌ی $\boldsymbol{Y}$ به جز مجموعه‌ای با احتمال صفر بررسی می‌کنیم. مجموعه‌ی محدود شده از ماتریس $\boldsymbol{Y}$ را در نظر بگیرید:

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{\theta}) = \{\boldsymbol{Y} | \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\psi}\} \quad (۴۲)$$

فرض می‌کنیم $\boldsymbol{\theta}$ و $\boldsymbol{\theta}'$ دو مجموعه جواب باشند. حال تعریف می‌کنیم:

$$D(\theta) = \cup_{\theta'} D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') \quad (۴۳)$$

که در آن

$$D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = \{\boldsymbol{Y} | \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}')\boldsymbol{\psi}'\} \quad (۴۴)$$

از آنجایی که $\text{rank}(\boldsymbol{Y}) = \eta$ و هر ستون آن گسترشیاز $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})$ با رتبه $2p-1$ است. بنابراین برای توصیف Y به $(2p-1)\eta$ پارامتر مختلط نیاز داریم. پس

$$\dim \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{\theta}) = 2(2p-1)\eta \quad (۴۵)$$

$$\dim D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = 2\eta\,\zeta \quad (۴۶)$$

سپس دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $d < 2q - (2p-1)$

از آنجایی که

$$\zeta = 2q - (2p-1) \quad (۴۷)$$

پس داریم:

$$\dim D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = 2(2q - (2p-1))\eta \quad (۴۸)$$

می‌دانیم $\dim(\boldsymbol{\theta}') = q$،

$$\dim D(\boldsymbol{\theta}) \le 2(2q - (2p-1))\eta + q \quad (۴۹)$$

حال برای

$$\dim D(\boldsymbol{\theta}) < \dim \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{\theta}) \quad (۵۰)$$

باید داشته باشیم:

$$q < \frac{4\eta}{4\eta + 1}(2p-1) \quad (۵۱)$$

حالت دو: $d > 2q - (2p-1)$

$$\dim D(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}') = 2d\eta \quad (۵۲)$$

بنابراین

$$\dim D(\boldsymbol{\theta}) \le 2d\eta + q \quad (۵۳)$$

پس برای

$$\dim D(\boldsymbol{\theta}) < \dim \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{\theta}) \quad (۵۴)$$

می‌بایست:

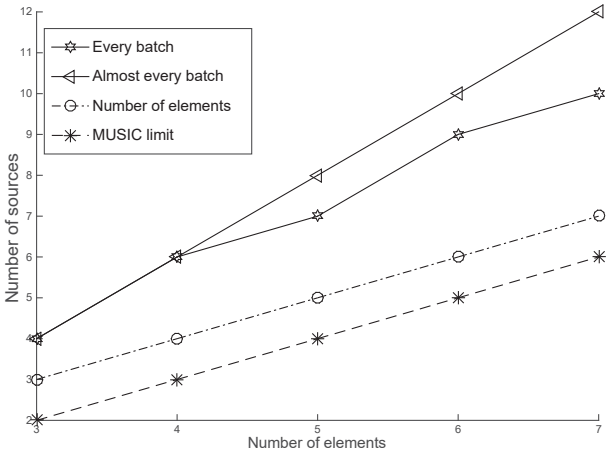
$$q < \frac{2\eta}{2\eta + 1}(2p-1) \quad (۵۵)$$

توضیح ۱. می‌دانیم $\eta \ge 1$، پس نامساوی آخر فشرده‌تر است.

توضیح ۲. با برقرار بودن رابطه‌ی آخر نتیجه می‌شود که منابع می‌توانند با احتمالِ یک به طور یکتا تخمین زده شوند.

توضیح ۳. از آنجایی که $\eta \le q$ است، حداکثر تعداد منبع قابل تخمین به طور یکتا برابر $2p-2$ خواهد بود.

توضیح ۴. از انجایی که "مجموعه هر داده" سخت‌گیرانه تر از "تقریبا هر مجموعه داده" است، شروط به دست آمده متناظر نیز بدین‌گونه است. (رابطه (۴۰) و (۵۵) و همچنین شکل (۱) مشاهده نمایید). به جز حالت مرزی $\eta = q$ که به نتیجه یکسان منجر می‌شود.



شکل (۱): نمودار تعداد منابع قابل تخمین به صورت یکتا در مقایسه با تعداد عناصرآرایه. در حدود دوبرابر تعداد عناصر آرایه، جهت منبع به صورت یکتا قابل محاسبه است

۴-۳- یکتایی روش ختری-رائو برای داده های مشروط

در این قسمت فرض می‌کنیم محدودیتی به صورت زیر بر سیگنال باشد:

$$f_j\left(E|s_k(t_i)|^2, \lambda_j^{\mu}\right) = 0 \quad (۵۶)$$

$$k = 1, \dots, q \text{ and } j = 1, \dots, J \quad (۵۷)$$

که در آن $E|s_k(t_i)|^2$ ممان مرتبه دوم منبع kام در زمان t_i است. f_j یک نگاشت از صفحه‌ی مختلط به خط حقیقی است. λ_j^{μ} یک بردار از پارامترها با μ پارامتر حقیقی است [۱۱]. در واقع این شرایط

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.14- No.2 Summer 2017

[Downloaded from jiaeee.com on 2026-10-30]

[DOR: 20.1001.1.26765810.1396.14.2.4.7]

محدودیتی بر روابط بین واریانس منابع قرار می‌دهد. که کاربردی مثل محدودیت توان می‌تواند مثال آن باشد. برای $J=1$ و $\mu=1$ خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{q} E|s_k(t_i)|^2 - P = 0 \qquad (۵۸)$$

تعداد پارامتر آزاد برای توصیف $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})$ برابر $2p-1$ می‌باشد. بردار معادل منبع $\boldsymbol{\psi}$ که یک ماتریس حقیقی $q \times M$ با رتبه η است، توسط $q\eta$ پارامتر حقیقی توصیف می‌شود.

مجموعه همه بردار $\boldsymbol{\psi}$ که در شرایط فوق صدق می‌کند را با D نشان می‌دهیم. به خاطر شرط تعداد پارامتر آزاد به مقدار $J(\eta-\mu)$ کاهش می‌یابد. بنابراین

$$\dim D = q\eta - J(\eta-\mu) \qquad (۵۹)$$

مجموعه جواب‌های تکراری همچون قسمت قبل تعریف می‌شود:

$$D(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{U}_{\boldsymbol{\theta}'} \qquad (۶۰)$$

برای یکتایی کافی است، که بُعد مجموعه $D(\boldsymbol{\theta})$ کمتر از بُعد D باشد. حال دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت یک: $\mathrm{d} < 2q - (2p-1)$

از آنجایی که

$$\zeta = \mathrm{null}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}) \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}')] \qquad (۶۱)$$

و

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}')] = \min\{2p-1, 2q-d\} \qquad (۶۲)$$

پس

$$\zeta = 2q - (2p-1) \qquad (۶۳)$$

بنابراین به تعداد $2(2q-(2p-1))$ پارامتر حقیقی برای هر بردار درون $\mathrm{null}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}) \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}')]$ و تعداد $2(2q-(2p-1))\eta$ برای توصیف ماتریس با رتبه η از $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}\\ \boldsymbol{\psi}'\end{bmatrix}$ نیاز است. بنابراین

$$\dim D(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}') = 2(2q-(2p-1))\eta - J(\eta-\mu) \qquad (۶۴)$$

پس

$$\dim D(\boldsymbol{\theta}) = 2(2q-(2p-1))\eta - J(\eta-\mu) + q \qquad (۶۵)$$

برای اینکه

$$\dim D(\boldsymbol{\theta}) < dim D \qquad (۶۶)$$

برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$q < \frac{2\eta}{3\eta+1}(2p-1) \qquad (۶۷)$$

همان‌طور که دیده می‌شود، اثر تعداد پارامترهای شرط اثر یکسانی بر بعد D و $\dim D(\boldsymbol{\theta})$ دارد، پس در رابطه کلی بی تأثیر خواهد بود.

حالت دو: $d > 2q - (2p-1)$

همانند بخش قبل با حذف ستون تکراری خواهیم داشت:

$$\zeta = (2q-d) - Rank[\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\theta})\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{\theta}')] = 0 \qquad (۶۸)$$

و

$$\dim D(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta}') = 0 - J(\eta-\mu) \qquad (۶۹)$$

بنابراین

$$\dim D(\boldsymbol{\theta}) < -J(\eta-\mu) + q \qquad (۷۰)$$

پس می‌توان با $\eta > 1$ داشته باشیم:

$$\dim D(\boldsymbol{\theta}) < dim D \qquad (۷۱)$$

۳-۵- توصیف دیگری برای داده های مشروط

این بخش با الهام از [۱۲] توصیف دیگری برای یکتایی جواب برای مساله‌ی خودمان ارائه می‌دهیم. از آنجایی که $\boldsymbol{\psi}$توسط $q\eta$ پارامتر حقیقی توصیف می‌شود، تعداد پارامتر آزاد بعد از اعمال شرط به $J(\eta-\mu)$ کاهش می یابد. از آنجایی که $\boldsymbol{\psi}$ ناشی از q تا منبع است، بعد مجموعه محدود شده به شرط برابر $q\mu + q - J(\eta-\mu)$ خواهد شد.

$$C \triangleq \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta}')\boldsymbol{\psi}' \qquad (۷۲)$$

مجموعه تکراری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \{\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\psi} : \boldsymbol{C} = 0 \text{ constrained} \,\} \qquad (۷۳)$$

همچنین $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\theta})\ \boldsymbol{\psi}$ با تعداد $2q\eta + q$ پارامتر مختلط توصیف می‌شود. با اعمال شرط به تعداد $2(2p-1)\eta$ و $J(\eta-\mu)$ کاسته می‌شود. بنابراین

$$\dim = 2(2q\eta+q) - 2(2p-1)\eta - J(\eta-\mu)) \qquad (۷۴)$$

خواهد شد. برای یکتایی پاسخ، بعد مجموعه تکراری، باید کمتر از ابعاد مجموعه محدود شده باشد. که به معنای

$$2(2q\eta+q) - 2(2p-1)\eta - J(\eta-\mu)) < q\eta + q - J(\eta-\mu)) \qquad (۷۵)$$

می‌باشد، که به همان رابطه ارائه شده منتج می‌شود.

۴- بسط روش ختری-رائو برای منابع ایستان

همانطور که گفته شد روش ختری-رائو برای منابع شبه‌ایستان معرفی شده است [۳]. در این بخش کارایی این روش برای منابع ایستان به طور مختصر تبیین می‌شود.همانند منابع شبه‌ایستان، در هر فریم تخمینی از ماتریس همبستگی محاسبه می‌شود. سپس با ستونی سازی آن $\boldsymbol{y}_m$ به دست می‌آید. حال $\boldsymbol{y}_m$ مربوط به هر فریم به عنوان ستون ماتریس $\boldsymbol{Y}$ قرار می‌دهیم.

$$\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_M] \qquad (۷۶)$$

بدین‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{A}^* \odot \boldsymbol{A})\boldsymbol{\psi} + \sigma^2 \mathrm{vec}(\boldsymbol{I})\boldsymbol{1}_M^T \qquad (۷۷)$$

که در آن ستون‌های $\boldsymbol{\psi}$ تخمین‌هایی از همبستگی منبع در فریم‌های مختلف می‌باشند. اکنون اگر بتوانیم نشان دهیم $\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{1}_M^T]$ رتبه ستونی آن کامل است، می‌توان مولفه‌ی نویز را حذف کرد و مانند منابع شبه‌ایستان جهت منابع را تخمین زد.

قضیه۳: هنگامی که $\boldsymbol{1}_M^T$ ستونی از یک، به تعداد M بوده و $\boldsymbol{\psi}$ ارائه شده در بحث فوق باشد،$\mathbf{Q} = [\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{1}_M^T]$ یک ماتریس رتبه ستونی کامل با احتمال یک است.

اثبات این قضیه در پیوست یک آورده شده است.

[Downloaded from jiaeee.com on 2026-10-30]

[DOR: 20.1001.1.26765810.1396.14.2.4.7]
Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers Vol14 No.2Summer 2017

۵- کران کرامر-رائو CRB

معیار بسیار مهم برای سنجش عملکرد یک تخمین‌گر خطای آن است. کم بودن خطای تخمین‌گر حاکی از عملکرد مناسب آن است. بدین صورت میخواهیم خطا را حداقل نماییم، اما بعضی مواقع نمی‌توانیم به صفر برسانیم. با این‌حال اگر بتوانیم مقدارِ حداقل خطای ممکن را محاسبه نماییم، قدم بسیار مهمی را برداشته‌ایم. بدین‌منظور کرانِ کرامر-رائو ارائه شده است. بدین‌صورت که ابتدا خطای تخمین‌گر پیشنهادی ناریب[۱۸](برابر بودن امید مقدار تخمین زده شده با مقدار صحیح آن) را محاسبه کرده، سپس آن‌را با کران کرامر-رائو مقایسه می‌نماییم. اگر تخمین‌گر مورد نظر به این کران برسد، بهترین تخمین گر ممکن از دید حداقل خطا را ارائه کرده‌ایم [۷].

قضیه ۴: برای چگالی احتمال $P(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})$ اگر شرط عادی بودن[۱۹] به صورت

$$\mathrm{E}\left[\frac{\partial \ln p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right]=0 \qquad (۷۸)$$

برقرار باشد. مقدار خطای تخمین‌گر ناریب در شرط زیر صدق می‌کند [۷]:

$$\mathrm{var}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) \geq \mathrm{FIM}^{-1} \qquad (۷۹)$$

$$\mathrm{FIM}=-\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ln p(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2}\right] \qquad (۸۰)$$

که در آن FIM و $\boldsymbol{\alpha}$ به ترتیب ماتریس اطلاعات فیشر وبردار مجهول می‌باشد.

در مساله تخمین جهت منابع، برای محاسبه کران کرامر-رائو تلاش های بسیاری شده است. ابتدا ۱۹۹۰ استویکا[۲۰] و همکاران [۱۳] به جای محاسبه مستقیم کران کرامر-رائو، واریانس خطای تخمین‌گر حداکثر درستنمایی را محاسبه کرده‌اند که به صورت مجانبی برابر با کران است. ده سال بعد در [۸] محاسبه مستقیم انجام شده است. اما تعداد منابع کمتر از تعداد عناصر آرایه فرض شده است. یکی از نوآوری‌های این پژوهش محاسبه کران کرامر-رائو برای تعداد منابع بیشتر از تعداد عنصر آرایه می‌باشد. ابتدا در ادامه، نتایج مقاله‌ی مذکور که برای تعداد منابع کمتر از تعداد عنصر آرایه مناسب است، مرور می شود.

۵-۱- کرامر-رائو برای تعداد منابع کمتر از تعداد عنصر آرایه

همانطور که اشاره شد برای ماتریس همبستگی سیگنال دریافتی داریم:

$$\boldsymbol{R}_x=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{A}^H+\sigma^2\boldsymbol{I} \qquad (۸۱)$$

در این مساله بردار مجهول به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\alpha}=[\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\rho}^T \quad \sigma]^T \qquad (۸۲)$$

که در آن

$$\boldsymbol{\theta}=\left[\theta_1,\dots,\theta_q\right]^T \qquad (۸۳)$$

جهت منبع به تعداد q تا می‌باشد. σ جذر واریانس نویز می‌باشد. همچنین $\boldsymbol{\rho}$ یک بردار شامل عناصر روی قطر، قسمت حقیقی و موهومی عناصر بالا مثلثی ماتریس همبستگی منبع است. این بدان علت است که ساختار ماتریس همبستگی به صورت هرمیتی[۲۱] است. پس

$$\boldsymbol{\rho}:\left\{\boldsymbol{R}_s^{(i,i)},\ \mathrm{Re}(\boldsymbol{R}_s^{(i,j)}),\quad \mathrm{Im}(\boldsymbol{R}_s^{(i,j)})\right\} \qquad (۸۴)$$

$$\text{for } i,j=1,\dots,q.\ j>i \qquad (۸۵)$$

در [7] آمده است که برای سیگنال گوسی با ماتریس همبستگی $\boldsymbol{R}_x$ماتریس اطلاعات فیشر به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathrm{FIM}_{i,j}=N\mathrm{Tr}\left(\frac{d\boldsymbol{R}_x}{d\alpha_i}\boldsymbol{R}_x^{-1}\frac{d\boldsymbol{R}_x}{d\alpha_j}\boldsymbol{R}_x^{-1}\right) \qquad (۸۶)$$

$$\text{for } i,j=1,\dots,q^2+q+1 \qquad (۸۷)$$

که در آن N تعداد نمونه‌ها می‌باشد.

قضیه ۵: کران کرامر-رائو برای تخمین جهت منابع به صورت زیر می باشد[۸]:

$$\mathrm{CRB}(\boldsymbol{\theta})=\frac{\sigma}{2N}\mathrm{Re}\{(\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{A}}^{\perp}\boldsymbol{D}) \odot (\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{R}_x^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_s)\}^{-1} \qquad (۸۸)$$

که در آن

$$\boldsymbol{D}=[\boldsymbol{d}_1,\dots,\boldsymbol{d}_q] \qquad (۸۹)$$

$$\boldsymbol{d}_i=\frac{d\boldsymbol{a}(\theta_i)}{d\theta_i} \qquad (۹۰)$$

و همچنین

$$\boldsymbol{\Pi}_{\mathrm{A}}^{\perp}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{A}} \qquad (۹۱)$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^* \qquad (۹۲)$$

۵. ۲. کران کرامر-رائو برای منابع ناهمبسته بیشتر از تعداد عنصر آرایه

در این بخش محاسبه کران کرامر-رائو برای منابع ناهمبسته به تعداد بیشتری از تعداد عنصر آرایه مدنظر است. فرض کنیم، می‌دانیم منابع ناهمبسته هستند، دیگر نیازی به تخمین عناصر غیرقطری ماتریس همبستگی منبع نیست و آن‌را پیش‌فرض صفر در نظر می‌گیریم. در این صورت بردار مجهول به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\alpha}=[\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\rho}^T \quad \sigma]^T \qquad (۹۳)$$

که در آن

$$\boldsymbol{\theta}=\left[\theta_1,\dots,\theta_q\right]^T \qquad (۹۴)$$

جهت منبع به تعداد q تا می‌باشد. σ جذر واریانس نویز می‌باشد. همچنین $\boldsymbol{\rho}$ یک بردار شامل فقط عناصر روی قطر ماتریس همبستگی منبع است. پس

$$\boldsymbol{\rho}:\left[\boldsymbol{R}_s^{(1,1)},\dots,\boldsymbol{R}_s^{(q,q)}\right]^T \qquad (۹۵)$$

با استفاده از رابطه (۹۲) و خواص ستونی‌سازی داریم:

[Downloaded from jiaeee.com on 2026-10-30]

[DOR: 20.1001.1.26765810.1396.14.2.4.7]

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.14- No.2 Summer 2017

$$\frac{1}{N}\mathrm{FIM}_{i,j} = \mathrm{vec}\left(\frac{d\boldsymbol{R}_x}{d\alpha_i}\right)^* (\boldsymbol{R}_x^{-T} \otimes \boldsymbol{R}_x^{-1})\mathrm{vec}\left(\frac{d\boldsymbol{R}_x}{d\alpha_j}\right) \quad (۹۶)$$

و به طور معادل

$$\frac{1}{N}\mathrm{FIM} = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{\alpha}^T}\right)^* (\boldsymbol{R}_x^{-T} \otimes \boldsymbol{R}_x^{-1})\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{\alpha}^T}\right) \quad (۹۷)$$

که در آن

$$\boldsymbol{r} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_x) = (\boldsymbol{A}^* \otimes \boldsymbol{A})\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_s) + \sigma^2\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}) \quad (۹۸)$$

می‌توانیم به دو بخش جدا کنیم:

$$(\boldsymbol{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \boldsymbol{R}_x^{-\frac{1}{2}})\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{\theta}^T} \;\middle|\; \frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{\rho}^T}\frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{\sigma}}\right] \triangleq [\mathbf{G} \;|\; \boldsymbol{\Delta}] \quad (۹۹)$$

بنابراین

$$\frac{1}{N}\mathrm{FIM} = \begin{bmatrix}\mathbf{G}^H \\ \boldsymbol{\Delta}^H\end{bmatrix}[\mathbf{G} \quad \boldsymbol{\Delta}] = \begin{bmatrix}\mathbf{G}^H\mathbf{G} & \mathbf{G}^H\boldsymbol{\Delta} \\ \boldsymbol{\Delta}^H\mathbf{G} & \boldsymbol{\Delta}^H\boldsymbol{\Delta}\end{bmatrix} \quad (۱۰۰)$$

از آنجایی که ما به دنبال کران کرامر-رائو برای مساله تخمین جهت منابع هستیم، فقط معکوس بلوک اول در ماتریس اطلاعات فیشر برایمان کافی است. با استفاده از رابطه اول قضیه معکوس ماتریس بلوکی

$$\mathrm{CRB}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N}(\mathbf{G}^H\mathbf{G} - \mathbf{G}^H\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{\Delta}^H\boldsymbol{\Delta})^{-1}\boldsymbol{\Delta}^H\mathbf{G})^{-1} \quad (۱۰۱)$$

حال $\boldsymbol{\Delta}$ به دو بخش جدا می‌کنیم:

$$\boldsymbol{\Delta} = \left(\boldsymbol{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \boldsymbol{R}_x^{-\frac{1}{2}}\right)\left[\frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{\rho}^T} \middle|\; \frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{\sigma}}\right] \triangleq [\mathbf{V} \;|\; \mathbf{u}] \quad (۱۰۲)$$

ابتدا برای محاسبه $\mathbf{G}$ داریم:

$$\frac{d\boldsymbol{R}_x}{d\theta_k} = [0 \dots \boldsymbol{d}_k \dots 0]\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_s\begin{bmatrix}\mathbf{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{d}_k^* \\ \vdots \\ \mathbf{0}\end{bmatrix} = \boldsymbol{d}_k\boldsymbol{c}_k^*\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_k\boldsymbol{d}_k^* \quad (۱۰۳)$$

که در آن $\boldsymbol{c}_k$ ستون k ام از ماتریس $\boldsymbol{R}_s$ است.حال ستون k ام از $\mathbf{G}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\boldsymbol{g}_k = \left(\boldsymbol{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \boldsymbol{R}_x^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{d\mathbf{r}}{d\theta_k} = \left(\boldsymbol{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \boldsymbol{R}_x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{vec}(\frac{d\mathbf{R}_x}{d\theta_k}) \quad (۱۰۴)$$

که به طور معادل

$$\boldsymbol{g}_k = \mathrm{vec}\left(\boldsymbol{R}_x^{-\frac{1}{2}}\frac{d\mathbf{R}_x}{d\theta_k}\boldsymbol{R}_x^{-\frac{1}{2}}\right) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{Z}_k + \boldsymbol{Z}_k^*) \quad (۱۰۵)$$

که در آن

$$\boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{R}_x^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}_k\boldsymbol{d}_k^*\boldsymbol{R}_x^{-\frac{1}{2}} \quad (۱۰۶)$$

محاسبه $\mathbf{V}$: طبق تعریف داشتیم:

$$\mathbf{V} = \left(\boldsymbol{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \boldsymbol{R}_x^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{\rho}^T} \quad (۱۰۷)$$

همچنین

$$\frac{d\mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_x)}{d\boldsymbol{\rho}^T} = (\boldsymbol{A}^* \otimes \boldsymbol{A})\mathrm{vec}(\hat{\boldsymbol{J}}) \quad (۱۰۸)$$

که در آن $\hat{J}$ یک ماتریس $q \times p^2$ است. برای سطر i ام آن همه درایه‌های آن صفر است به جز درایه‌ی $(i(q+1)+1)$ ام که یک می‌باشد.

درواقع از یک ماتریس همبستگی که روی قطر آن مقدار دارد، هر بار نسبت به یک درایه مشتق می‌گیریم. می‌دانیم مشتق آن درایه نسبت به خود یک است و نسبت به بقیه درایه‌ها صفر خواهد بود. در ادامه آن را ستونی می‌کنیم و به عنوان یک ستون از ماتریس $\hat{J}$ قرار خواهیم داد. بدین ترتیب $\boldsymbol{V}$ محاسبه خواهد شد.در مرحله آخر محاسبه $\mathbf{u}$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{u} = \left(\boldsymbol{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \boldsymbol{R}_x^{-\frac{1}{2}}\right)\frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{\sigma}} = \left(\boldsymbol{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \boldsymbol{R}_x^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{vec}(\boldsymbol{I}) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{R}_x^{-1}) \quad (۱۰۹)$$

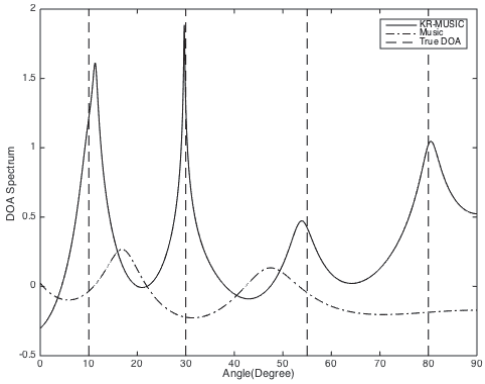
بدین‌ترتیب تمام اجزای ماتریس اطلاعات فیشر تکمیل شد. با معکوس بلوکی ارائه شده و ساده سازی کران کرامر-رائو برای به دست آمد.تفاوت عمده‌ای که محاسبات انجام شده در این بخش با مرجع دارد از آنجایی ناشی می‌شود که در حین محاسبه کران نیاز به $(\boldsymbol{\Delta}^H\boldsymbol{\Delta})^{-1}$ داشتیم. ابعاد $\boldsymbol{\Delta}$ برابر $p^2 \times (q^2+1)$ بود. در حالتی که تعداد منابع کمتر از تعداد عنصر آرایه باشد، این ماتریس رتبه کاملِ ستونی می‌شود، آنگاه $\boldsymbol{\Delta}^H\boldsymbol{\Delta}$ معکوس‌پذیر خواهد بود. اما هنگامی که تعداد منابع بیشتر از تعداد عنصر آرایه باشد، رتبه این ماتریس برابر تعداد سطر آن می‌شود، آنگاه $\boldsymbol{\Delta}^H\boldsymbol{\Delta}$ ماتریس مربعی رتبه کامل نیست و نمی‌توان از آن معکوس گرفت. با این حال با فرض دانستن اینکه منابع ناهمبسته هستند به ما کمک کرد تا ابعاد $\boldsymbol{\Delta}$ برابر $p^2 \times (q+1)$ شود و سپس $\boldsymbol{\Delta}^H\boldsymbol{\Delta}$ معکوس‌پذیر شود.

۶- شبیه سازی

یک آرایه‌ی خطی سه عنصری در نظر گرفته شده است. چهار منبع ایستان گوسی ناهمبسته از جهات $\boldsymbol{\theta} = \{10°, 30°, 55°, 80°\}$به این آرایه وارد می‌شوند. SNR=20dB است. الگوریتم میوزیک و الگوریتم ختری-رائو برای این شرایط با استفاده از نرم افزار متلب[۲۲] شبیه‌سازی شده است. طیف این دو الگوریتم در شکل (۲) رسم شده است.

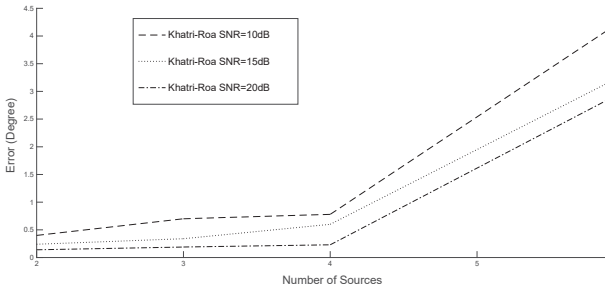
همانطور که در شکل دیده می‌شود روش ختری-رائو به خوبی توانسته است جهات منابع ایستان را تخمین بزند که حاکی از درستی تحلیل ارائه شده در بخش‌های قبل می‌باشد. شایان ذکر است که روش میوزیک به دلیل محدودیت ذاتی خود زیر فضای نویزی ندارد و تخمین غلطی ارائه داده است.

[Downloaded from jiaeee.com on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.26765810.1396.14.2.4.7]
Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers Vol14 No.2Summer 2017



شکل(۲): طیف روش ختری-رائو در مقایسه با میوزیک. میوزیک بر خلاف روش ختری-رائو نتوانسته است تخمین مناسبی ارائه کند

شبیه‌سازی بعدی مربوط به بررسی حداکثر تعداد منابع قابل تخمین است. بدین‌منظور خطای تخمینِ جهت با استفاده از روش ختری-رائو برای آرایه‌ی خطی سه عنصری برحسب تعداد منابع برای نسبت سیگنال به نویز $10dB$، $15dB$ و $20dB$ در شکل (۵-۲) رسم شده است. حداکثر تعداد منابع قابل تشخیص به صورت یکتا توسط رابطه ارائه شده در بخش ۳. ۲. برای $p=3,\eta=4$ برابر $q=4$ خواهد بود که به صورت شرط کافی به دست آمد. شکل (۳) حاکی از آن است که وقتی تعداد منابع بیشتر از حد محاسبه شده می‌شود، خطا به شدت افزایش می‌یابد.

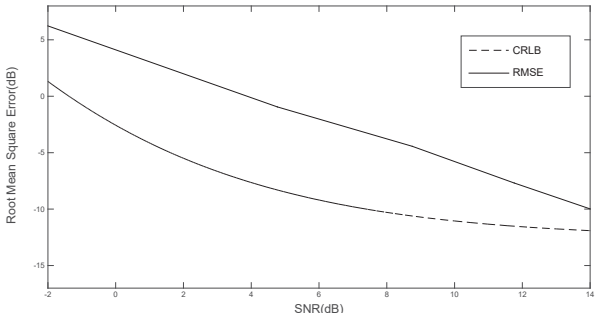


شکل(۳): مقایسه خطای روش ختری-رائو بر حسب تعداد منابع برای SNR=10,15,20dB. وقتی که تعداد منابع از حد محاسبه شده بیشتر می‌شود، خطا بسیار افزایش می‌یابد

در ادامه، خطای روش ختری-رائو در مقایسه با کران کرامر-رائو برای منابع ناهمبسته‌ی بیشتر از تعداد عنصر آرایه رسم می‌گردد. آرایه‌ی خطی با سه عنصر در نظر گرفته شده است که چهار منبع از جهات $\boldsymbol{\theta}=\{10°,30°,55°,80°\}$ بر آن وارد می‌شوند. جذر میانگین مربع خطا[۲۳] (RMSE) به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\mathrm{RMSE}^2=\frac{1}{\mathrm{N_M}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N_M}}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}\right)^2 \qquad (۱۱۰)$$

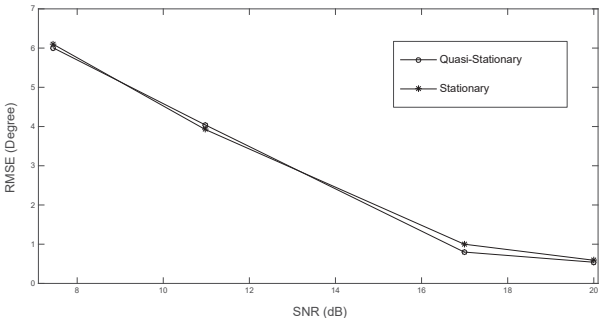
که در آن $\mathrm{N_M}$تعداد اجرای مونت-کارلو[۲۴] می‌باشد. در شکل زیر مقایسه میزان خطای روش ارائه شده و کران رسم شده است.



شکل(۴):مقایسه RMSE و کران کرامر-رائو برای روش ختری-رائو. نزدیکی این خطا به کران حاکی از عملکرد مناسب روش است

از شکل (۴) استنباط می‌شود که خطای تخمین روش ختری-رائو تا حدود $5dB$ به کران کرامر-رائو نزدیک است.

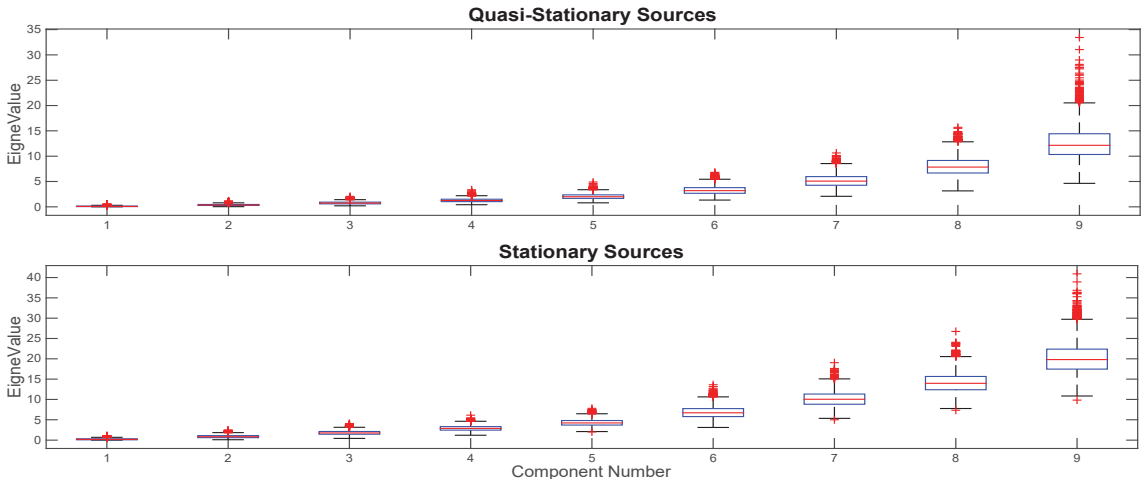
در شبیه‌سازی بعدی، خطای تخمین با استفاده از روش ختری-رائو برای منبع ایستان و شبه‌ایستان برحسب SNR مقایسه می‌شود. چهار منبع در همان جهات در نظر گرفته شده است. تخمین جهت با استفاده از ده فریم با طول ۳۰ نمونه انجام شده است. همانطور که ذکر شد، روش ختری-رائو برای منابع شبه‌ایستان معرفی شده بود، در این مقاله کارایی روش مذکور برای منابع ایستان به تایید رسید. بدین-ترتیب با توجه به شکل (۵) که خطای تخمین در این دو حالت مقایسه شده است، از بسیار نزدیک بودن خطا برای منبع ایستان و شبه‌ایستان حکایت دارد.



شکل(۵):RMSE برای روش ختری-رائو برای دو منبع ایستان و شبه-ایستان مقایسه شده است. روش مذکور برای منابع ایستان نیز تخمین مناسبی مثل منابع شبه‌ایستان ارائه می‌کند

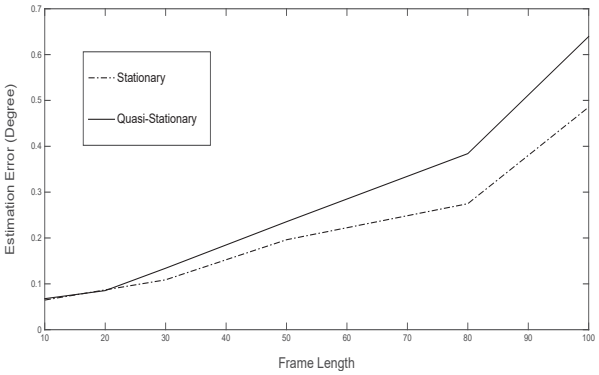
همچنین در این حالت توزیع مقدارویژه‌های داده‌های دریافتی در عناصر آرایه برای منبع ایستان و شبه‌ایستان در شکل (۶) رسم شده است. با توجه به این‌که چهار منبع داریم، چهار مقدارویژه بزرگِ آن، متناظر با زیرفضای سیگنال و بقیه مربوط به زیرفضای نویز هستند. بدین‌ترتیب با توجه به شکل (ستون ۵ و ۶ از شکل (۶) بالا (شبه-ایستان) و پایین (ایستان)) مشاهده می‌گردد که جداسازی زیرفضای سیگنال از نویز در این‌دو حالت تفاوتی خاصی ندارد و کارایی روش ختری-رائو برای منبع ایستان و شبه‌ایستان برقرار است.

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.14- No.2 Summer 2017
[Downloaded from jiaeee.com on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.26765810.1396.14.2.4.7]



شکل (۶): مقایسه بین توزیع مقادیرویژه داده‌ها برای دو منبع ایستان و شبه ایستان. مشاهده می‌گردد که اختلاف بین مقدارویژه‌های مرزی که سیگنال و نویز را جدا می‌کند (مقدارویژه‌ی پنجم و ششم) برای مبنع ایستان نسبت به منبع شبه‌ایستان تفاوت چندانی با یکدیگر ندارد.

در ادامه خطای تخمین برای دو منبع ایستان و شبه‌ایستان بر حسب طول فریم مقایسه شده است. تعداد نمونه‌ها N=1000 و نسبت سیگنال به نویز SNR=10dB درنظر گفته شده است. در شکل (۷) خطا بر حسب طول فریم از $L = 10$ الی $L = 100$ رسم شده است. در شکل مذکور مشاهده می‌گردد که با افزایش طول فریم، خطای روش برای هر دو نوع منبع افزایش یافته است، که به علت کاهش تعداد فریم است.



شکل(۷):مقایسه RMSE روش ختری-رائو برای منبع ایستان و شبه-ایستان. با افزایش طول فریم روش برای منابع شبه‌ایستان بهتر عمل می‌کند

همچنین مشاهده می‌گردد که خطا برای منبع شبه‌ایستان بیشتر از ایستان است. این بدان علت است که برای منبع شبه‌ایستان که در هر فریم واریانس منابع تغییر می‌کند، با افزایش طول فریم نمی‌تواند خود را با این تغییرات همراه کند، به تبعِ آن منجر به تخمین نامناسب می‌شود. لازم به ذکر است که این طول فریم در محاسبه تخمین ماتریس همبستگی تاثیرگذار است که منجر به تاثیر بر تخمینِ جهت می‌شود. بدین‌ترتیب خطای تخمین برای منبع ایستان کم‌تر به دست می‌آید.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا به مرور پیشینه تحقیق تخمین جهت منابع با استفاده از آرایه‌ای از آنتن‌ها پرداخته شده است. الگوریتم ختری-رائو در سال ۲۰۱۰ برای تخمین تعداد منابع ناهمبسته بیشتر از تعداد عنصر آرایه هنگامی که منابع شبه‌ایستان باشد، معرفی شده بود. در این مقاله شرایطی برای یکتایی جواب مساله تخمین جهت منابع در مدل ختری-رائو بررسی شده است، که به صورت نامساوی برای تعداد منابع قابل تخمین برحسب تعداد عناصر آرایه و رتبه‌ی ماتریس همبستگی منابع ارائه شده است. بدین‌صورت تعداد منابع قابل تخمین برای روش ختری-رائو بیشتر از تعداد عناصر آرایه به دست آمد. همچنین اثباتی برای کارآمدی روش ختری-رائو برای منابع ایستان ارائه شده است.

در ادامه کران کرامر-رائو که حد پایینی برای خطای تخمین‌گر ناریب است، بررسی شد. کران ارائه شده توسط استویکا برای تعداد منابع کمتر از تعداد عناصر قابل محاسبه بود. در این مقاله با استفاده از شرایط مساله، رابطه کران کرامر-رائو برای تعداد منابع ناهمبسته بیشتر از تعداد عنصرآرایه به دست آمد.

شبیه‌سازی‌های متعددی برای بررسی کارایی الگوریتم ارائه شدند. در ابتدا ناتوانی روش میوزیک هنگامی که تعداد منابع بیشتر از تعداد عنصر آرایه باشد، در مقایسه با کارایی روش ختری-رائو نشان داده شد. همچنین عملکرد مناسب روش برای منابع ایستان نیز مشاهده شد. علاوه برآن خطای تخمین روش ختری-رائو با کران کرامر-رائو مقایسه شد، که تفاوتی در حدود $5dB$ گزارش شد. این مقدار نشان از عملکرد مناسبِ روش ختری-رائو برای منابع ایستان دارد. در شرایطی که تعداد نمونه‌ها ثابت است و طول فریم افزایش می‌یابد خطای تخمین برای منابع ایستان کمتر از منابع ناایستان است، که این موضوع به علت ناتوانی در وفق دادن تخمین واریانس منابع با مقدار واقعی آن است.

[Downloaded from jiaeee.com on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.26765810.1396.14.2.4.7]
Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers Vol14 No.2Summer 2017

بدین‌ترتیب در این شرایط الگوریتم ختـری-رائـو بـرای منـابع ایسـتان نسبت به منابع شبه‌ایستان عملکرد بهتری دارد.

ضمایم

در این قسمت اثبات قضیه۳ ارائه می‌شود. برای نشان دادن رتبه ستونی کامل بودن به احتمال یک می بایست:

$$P\{\mathbf{Q} \text{ be full column rank}\} = 1 \quad (۱)$$

$$P\{\mathbf{c}^T\mathbf{Q} = 0\} = 0 \quad (۲)$$

که در آن $\mathbf{c}$ یک بردار با $M+1$درایه است. به طور معادل

$$P\left\{\sum_{i=1}^{M} c_i\boldsymbol{\psi}_i + c_{M+1}\mathbf{1}_M^T = 0\right\} = 0 \quad (۳)$$

که در آن $\boldsymbol{\psi}_i$ ستونی از $\boldsymbol{\psi}$ است. اگر نام‌گذاری کنیم:

$$W = \sum_{i=1}^{M} c_i\boldsymbol{\psi}_i \quad (۴)$$

$$k = -c_{M+1}\mathbf{1}_M^T \quad (۵)$$

به طور معادل می‌توان نوشت:

$$P\{W = \mathrm{k}\} = 0 \quad (۶)$$

kعددی ثابت خواهد بود. همچنین از آنجایی که منابع گوسی فرض شده‌اند، تخمین ماتریس همبستگی دارای توزیع ویشارت[۲۵] می باشد[۵]. پس ستونی‌شده‌ی آن ($\boldsymbol{\psi}_i$) دارای توزیع ویشارت خواهد بود. از آنجایی که ترکیب خطی آن (W) هم یک متغیر تصادفی با توزیع پیوسته است، احتمال رخ دادن رابطه فوق صفر خواهد بود. بدین‌ترتیب اثبات قضیه کامل است. بدین‌ترتیب با حذف نویز و تجزیه مقدار ویژه می‌توان جهت منابع را تخمین زد.

مراجع

[1] Atashbar M., Kahae, M., "Multi-Speakers' Direction Of Arrival Estimation Using WCSSDOA Method", Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers Vol13 No.2 Summer 2016,

[2] Schmidt R., "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimatio,", IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-34, No. 3, pp.276-280, Mar. 1986.

[3] Ma W. K., Hsieh T. H., and Chi C. Y., "DOA Estimation of Quasi-Stationary Signals With Less Sensors Than Sources and Unknown Spatial Noise Covariance: A Khatri–Rao Subspace Approach", IEEE Trans. Signal Process., vol. 58, no. 4, pp. 2168–2180, Apr. 2010.

[4] Pal P. and Vaidyanathan P.P., "Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom," IEEE Trans. Signal Process., vol. 58, no. 8, pp. 4167–4181, Aug. 2010.

[5] Abramovich Y. I., Spencer N. K., and Gorokhov A. Y., "DOA estimation for noninteger linear Arrays with More Uncorrelated Sources than Sensors", IEEE Trans. Signal Process., vol. 48, pp. 943-955, Apr. 2000.

[6] Arianandа D., and Leus G., "Direction of arrival estimation for more correlated sources than active sensors", Signal Process. (Elsevier), Vol.93, pp. 3435–3448, Dec. 2013.

[7] Kay S.M., Fundamentals of Statistical Signal processing: Estimation Theory, Prentice Hall. 1993.

[8] Stoica P., Larsson E.G., Gershman A.B., "The stochastic CRB for array processing: a textbook derivation", IEEE Signal Process. Lett. , vol.8, no. 5, pp. 148–150, May 2001.

[9] Bresler Y., and Mackovski A., "On the number of signals resolvable by a uniform linear array", IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process., vol. ASSP-34, no. 6, pp. 1361-1375, Dec. 1986.

[10] Wax M., and Ziskind I., "On unique localization of multiple sources by passive sensor arrays", IEEE Trans. Signal Process., vol. 37, no. 7, pp.996-1000, Jul. 1989.

[11] Wax M., "On unique localization of constrained-signal sources," IEEE Trans. Signal Process., vol. 40, pp. 1542-1547, June 1992.

[12] Valaee S., and Kabal P., "Alternative Proofs for "On Unique Localization of Constrained-Signal Sources" vol. 42, no. 12, pp. 3547-3548, Dec. 1994.

[13] Stoica P., Nehorai A., "Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process, vol. 38, no.10, pp. 1783-1795, Oct 1990

[14] Liu Q, Ouyang S., He ZQ., "2-D DOA estimation of quasi-stationary signals based on Khatri-Rao subspace approach", IEEE International Conference (ICRTIT'2011), Aug. 2011.

[15] Chen T., Wu H., Zhao Z., "The Real-Valued Sparse Direction of Arrival (DOA) Estimation Based on the Khatri-Rao Product", Sensors. 2016 May; 16(5): 693.

[16] Krim H. and Viberg M., "Two decades of array signal processing research, the parametric approach," IEEE Signal Process. Mag., pp. 67-94, Jul. 1996.

[17] Zeraatkar J., Farrokhi H., Neda N., "Analyzing the effects of the transmitter and receiver antenna arrays separations on MIMO Channel capacity", Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers Vol13 No.2 Summer 2016.

[18] Shen Q., Liu W, Cui W., Wu S., "Underdetermined DOA Estimation Under the Compressive Sensing Framework: A Review," IEEE Access, 2016.

[19] Das A., Hodgkiss W., and Gerstoft P., "Coherent Multipath Direction-of-Arrival Resolution Using Compressed Sensing", IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2016.

[20] Shen, Y., Jing Y., and Feng N., "Construction of deterministic sensing matrix and its application to DOA estimation." Journal of Systems Engineering and Electronics 27.1 (2016): 10-19.

[21] Yu K, Zhang Y., Bao M.,; Hu Y., Wang Z,. "DOA Estimation from One-Bit Compressed Array Data via Joint Sparse Representation", IEEE Signal Processing Letters, Sept. 2016.

زیرنویس‌ها

[1]beam forming
[2]Capon
[3] Bartlett
[4]MUSIC (multiple signal classification)
[5]Khatri-Rao approach
[6]nested array

[Downloaded from jiaeee.com on 2026-10-30]

[DOR: 20.1001.1.26765810.1396.14.2.4.7]

[7]co-prime array
[8]dynamic array
[9]Cramer-Rao band (CRB)
[10] steering vector
[11] vectorization
[12] projection
[13] Singular Value Decomposition (SVD)
[14]Bresler
[15]Wax and Ziskind
[16]Every batch
[17]Almost every batch
[18] unbiased
[19]regularity
[20]Stoica
[21]Hermitian
[22]MATLAB
[23]Root mean square error
[24]Monte-Carlo
[25]Wishart

[Downloaded from jiaeee.com on 2026-10-30]
[DOR: 20.1001.1.26765810.1396.14.2.4.7]