ظرفیت شبکه‌های حذفی تحت کدینگ فضایی شبکه

مهرداد سلماسی[1] **سید جمال الدین گلستانی[2]**

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- دانشگاه صنعتی اصفهان- اصفهان- ایران
salmasi@ec.iut.ac.ir

۲- استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- دانشگاه صنعتی اصفهان- اصفهان- ایران
golestani@ieee.org

چکیده: ظرفیت یک شبکه‌ی حذفی نقطه- به- نقطه را در حضور نوع مقیدی از کدینگ شبکه (کدینگ فضایی شبکه) محاسبه می کنیم. در کدینگ فضایی شبکه، جنبه‌ی زمانی کدینگ غایب است و کدینگ بر روی بسته‌های متوالی دریافت شده روی هر یال شبکه انجام نمی شود، بلکه هر گره تنها مجاز است که کدینگ را بر روی بسته های دریافتی از یالهای مختلف در همان لحظه انجام دهد.

برای یک زوج فرستنده- گیرنده، در هر رخداد حذف، ریت ارسال برابر مینیمم اندازه‌ی برش است. نشان می‌دهیم که ظرفیت ارسال تک-مقصدی برای شبکه‌ی حذفی برابر میانگین آماری مینیمم اندازه‌ی برش بوده و ثابت می‌کنیم که کدینگ خطی برای وصول به این ظرفیت کفایت می‌کند. در ادامه ثابت می‌کنیم که برای شبکه‌ای با گراف کامل، جهت دار و بدون دور که در آن هر گره مستقل از گره های دیگر در معرض حذف قرار می‌گیرد، ظرفیت تحت کدینگ فضایی شبکه و کدینگ عام شبکه برابر است. همچنین ظرفیت این شبکه را برای حالتی که یالها به صورت تصادفی و مستقل از هم حذف می‌شوند، تحت این دو نوع کدینگ مورد شبیه سازی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: کدینگ شبکه، ظرفیت ، شبکه های حذفی، کدینگ فضایی شبکه

تاریخ ارسال مقاله : ۱۳۸۹/۰۱/۱۶

تاریخ پذیرش مقاله : ۱۳۸۹/۰۹/۰۷

نام نویسنده‌ی مسئول : مهرداد سلماسی

نشانی نویسنده‌ی مسئول : اصفهان- دانشگاه صنعتی اصفهان- دانشکده برق و کامپیوتر- آزمایشگاه تحقیقاتی مخابرات بی سیم

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.8- No.2- Fall & Winter 2011

[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]

۱- مقدمه

در شبکه‌های مخابراتی امروزی مانند اینترنت، اطلاعات به وسیله‌ی مسیریابی[1] منتقل می‌شود. در روش مسیریابی، گره‌ها هیچ گونه عملیاتی روی بسته‌های اطلاعات انجام نمی‌دهند و تنها آنها را از ورودی بر روی یال‌های خروجی متناظر قرار می‌دهند. اخیراً مفهومی به نام کدینگ شبکه[2] ارائه شده است که توسیعی از مسیریابی می‌باشد. کدینگ شبکه به مفهومی اشاره دارد که در آن هر گره قادر است توابعی را بر روی داده‌های ورودی خود اعمال کرده و حاصل را بر روی لینک خروجی متناظر آن قرار دهد.

مفهوم کدینگ شبکه اولین بار توسط آقای Ahlswede و همکاران ایشان برای یک ارسال چند-مقصدی[3] مطرح شد. در یک ارسال چند-مقصدی یک گره‌ی منبع اطلاعات یکسانی را به تعدادی از گره ها ارسال می کند. در [۱] نشان داده شد که با استفاده از کدینگ شبکه، می‌توان به ماکزیمم ریت انتقال داده در یک ارسال چند-مقصدی دست یافت، در حالیکه الگوریتم‌های مسیریابی قادر به چنین دستاوردی نمی‌باشند.

در حالتی که تنها یک گره به عنوان گیرنده حضور داشته باشد (ارسال تک-مقصدی[4])، می‌توان نشان داد که نیازی به استفاده از کدینگ شبکه نبوده و الگوریتم‌های مسیریابی قادر به حصول به حداکثر نرخ ارسال می‌باشند.

در ادامه‌ی تحقیقات نشان داده شد که کدینگ خطی شبکه برای دستیابی به ظرفیت در حالت ارسال چند-مقصدی کفایت می کند [۲]. در حالی که به نظر می رسید این نوع کدینگ برای تمامی شبکه‌ها و در تمام حالات ارسال داده بهینه باشد، Daughtery و همکارانش با ارائه ی یک مثال نقض نشان دادند که برای برخی شبکه ها با بیش از یک ارسال چند-مقصدی، کدینگ خطی شبکه کافی نیست [۳]. در ادامه‌ی تحقیقات، Koetter و Medard یک چارچوب جبری برای تحلیل کدینگ شبکه ارائه کردند [۴]. همچنین بررسی‌هایی بر روی میزان افزایش ریت انتقال اطلاعات با استفاده از کدینگ شبکه نسبت به روش مسیریابی صورت گرفته است [۵]. از طرفی مسائل عملی نیز به تدریج مد نظر قرار گرفتند و برای مثال برای طراحی کدها در سطح شبکه بدون آنکه هماهنگی میان گره ها لازم آید، کدینگ شبکه‌ی تصادفی پیشنهاد شده است [۶].

کدینگ شبکه در شبکه های بی‌سیم نیز کارایی زیادی دارد. یکی از مسائل بسیار مهم در شبکه‌های بی‌سیم (به خصوص شبکه‌های سنسوری)، میزان توان مصرفی در هر یک از رئوس شبکه و همچنین توان مصرفی در کل شبکه است. یکی از مزایای کدینگ شبکه کاهش توان مصرفی در شبکه‌های بی‌سیم می‌باشد که در سالهای اخیر مورد بررسی قرار گرفته است [۱۰-۷].

از آنجا که شبکه‌های حذفی[5] مدل مناسبی برای دسته‌ی وسیعی از شبکه‌های امروزی می‌باشند (برای مثال شبکه‌های بی‌سیم)، محاسبه‌ی ظرفیت این شبکه ها در حضور کدینگ شبکه موضوع حائز اهمیتی است [۱۳-۱۱].

در یک شبکه‌ی تصادفی حذفی، لینک‌های شبکه ممکن است دچار قطعی شده و در نتیجه از شبکه حذف شوند. همانگونه که از تئوری اطلاعات استخراج می‌شود، با انجام کدینگ بر روی بسته‌های ورودی یک کانال حذفی می‌توان به حداکثر نرخ انتقال داده در آن کانال دست یافت. از این موضوع می‌توان در شبکه‌های حذفی نیز استفاده کرد. بدین ترتیب هر گره می‌تواند ابتدا بسته‌های داده را برای مدت زمانی از ورودی‌های خود جمع کرده و سپس کدینگ را بر روی تمامی آنها انجام دهد.

در حقیقت این شیوه از کدینگ ترکیبی از دو رویکرد می باشد. در رویکرد اول، مانند آنچه در شبکه‌های غیر تصادفی انجام می‌شود، هر گره یک بسته از هر لینک ورودی دریافت کرده و کدینگ را بر روی بسته‌های دریافتی انجام می‌دهد. با توجه به آنکه جنبه‌ی زمانی کدینگ در این شیوه محذوف است، آن را کدینگ فضایی شبکه می‌نامیم. در رویکرد دوم، هر گره عملیات کدینگ را بر روی بسته‌های دریافتی در زمانهای مختلف از یک ورودی انجام می دهد. به همین خاطر به آن کدینگ زمانی شبکه می‌گوییم. با جدا کردن این دو نوع کدینگ و بررسی اثر هر یک از آنها بر روی ظرفیت شبکه های حذفی، می توان دیدگاه ارزشمندی نسبت به ویژگیهای کدینگ در شبکه‌های حذفی بدست آورد.

برای اینکه انگیزه‌ی بحث روشن‌تر شود، مثالی ساده از یک شبکه‌ی حذفی ارائه می‌کنیم و ظرفیت حاصل از مسیریابی را با ظرفیت شبکه تحت کدینگ فضایی شبکه و همچنین ظرفیت شبکه تحت کدینگ زمانی شبکه مقایسه می‌کنیم.

گراف متناظر با شبکه در شکل (۱) نشان داده شده است. فرض کنید که هر لینک شبکه دارای ظرفیت ارسال ۱ بیت در هر بار استفاده است. همچنین فرض کنید که یال‌های e_3، e_4 و e_5 در معرض حذف قرار دارند و مستقل از یکدیگر و با احتمال حذف یکسان ε حذف می‌شوند. فرض کنید که x_1 و x_2 پیام‌هایی هستند که به ترتیب از طریق e_1 و e_2 به گره‌ی m می‌رسند. در حالتی که گره‌ی m تنها قادر به مسیریابی باشد، بهترین کاری که می‌تواند انجام دهد آن است که یکی از پیام‌های x_1 یا x_2 را کپی کرده (مثلاً x_1) و بر روی e_3, e_4 و e_5 به ترتیب پیام‌های x_1، x_1 و x_2 را ارسال کند. در این حالت آشکار است که با حذف یال e_3 دیگر پیام x_2 قابل حصول نیست.

در ضمیمه نشان می‌دهیم که ظرفیت شبکه در حالت مسیریابی برابر $C_1 = 2 - \varepsilon^2 - \varepsilon$ می‌شود.

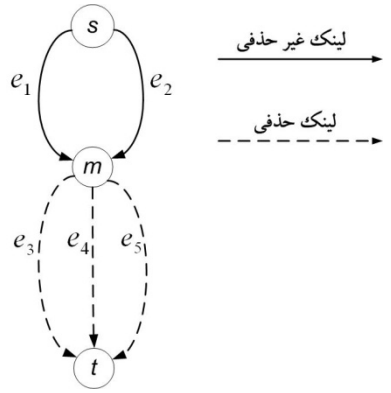
در حالتی که گره‌ی m اجازه‌ی انجام کدینگ فضایی را داشته باشد پیام‌های x_1, x_2 و $x_1 \oplus x_2$ را بر روی e_3، e_4 و e_5 قرار می‌دهد. آشکار است که با اینکار، حذف یک یال از شبکه نمی‌تواند تأثیری در نرخ انتقال اطلاعات داشته باشد و گره‌ی مقصد t می‌تواند

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.8- No.2- Fall & Winter 2011

[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]

هر دو پیام x_2, x_1 را بازیابی کند. در ضمیمه نشان می‌دهیم که ظرفیت شبکه در این حالت برابر است با $C_2 = 2 - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3$. به راحتی مشاهده می‌شود که برای $0 < \varepsilon < 1$، $C_2 > C_1$.

در حالتی که گره‌ی m بتواند از کدینگ زمانی استفاده کند، هر یال حذفی را می‌توان با یالی غیرحذفی و با ظرفیت $1-\varepsilon$ جایگزین کرد. در این حالت ظرفیت برابر است با $C_3 = \min(2, 3-3\varepsilon)$ که برای $0 < \varepsilon < 1$، $C_3 > C_2$.



شکل (۱): گراف متناظر با یک شبکه‌ی حذفی

این مثال نشان می‌دهد که در شبکه‌های حذفی حتی در حالت ارسال تک-مقصدی نیز می‌توان با استفاده از کدینگ فضایی شبکه به ظرفیت بیشتری نسبت به مسیریابی دست پیدا کرد. این موضوع برای شبکه‌های غیرحذفی صادق نیست و کدینگ فضایی شبکه در ارسال تک-مقصدی کمکی به افزایش ظرفیت نمی‌کند. همچنین کدینگ زمانی شبکه در این مثال از خود عملکرد بهتری نشان می‌دهد ولی ترکیب کدینگ زمانی و فضایی نمی‌تواند عملکردی بالاتر از کدینگ زمانی در این مثال ایجاد کند. این مثال اهمیت شیوه‌های مختلف کدینگ را نشان می‌دهد و ما را بر آن می‌دارد که به بررسی جداگانه‌ی آنها بپردازیم. در این مقاله تلاش می‌کنیم که ظرفیت شبکه‌های حذفی را تحت کدینگ فضایی شبکه بدست آوریم. ذکر این نکته ضروری است که بخشهایی از این پژوهش بر اساس مقاله‌ای است که پیش از این در [۱۴] ارائه کرده‌ایم. در ادامه‌ی مقاله و در بخش ۲ ضمن ارائه‌ی مدل شبکه، تعاریف جدیدی را برای مفهوم ظرفیت تحت انواع کدینگ بیان می‌کنیم و سپس در بخش ۳ ظرفیت یک ارسال تک-مقصدی را در شبکه‌های حذفی و تحت کدینگ فضایی شبکه بدست می‌آوریم. در بخش ۴ نیز با استفاده از نتایج حاصل، به محاسبه‌ی ظرفیت در شبکه-هایی می‌پردازیم که گراف شبکه به صورت کامل، جهت‌دار و بدون‌دور بوده و یالها و یا گره‌ها به صورت تصادفی و مستقل از هم در معرض حذف قرار می‌گیرند.

۲- مدل‌سازی شبکه، مرور قضایای قبلی و بیان نتایج جدید

در این بخش ضمن ارائه‌ی مدلی برای شبکه و بیان تعاریف ظرفیت برای این مدل، به توضیح نتایج قبلی پرداخته و در ادامه بطور خلاصه به نتایج حاصل از این مقاله اشاره می کنیم.

۲-۱- مدل شبکه

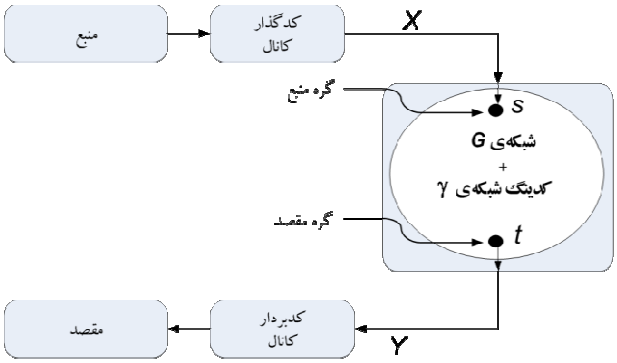
شبکه‌هایی که در این مقاله تحلیل می‌شوند، همگی در دسته‌ی شبکه-های نقطه- به- نقطه[۶] قرار می‌گیرند. در شبکه‌های نقطه- به- نقطه مانند شبکه‌های سیمی، یک گره اطلاعات را در فضای اطراف پخش نمی‌کند و هر بسته را از طریق یک لینک خروجی به سمت تنها یک گره ارسال می‌کند، در حالی که در شبکه‌های نقطه- به- چند نقطه مانند شبکه‌های بی‌سیم، اطلاعات گره در فضای اطراف پخش می‌شود و چندین گره اطلاعات یکسانی را دریافت می‌کنند. در این مقاله یک شبکه‌ی نقطه- به- نقطه، حذفی[۷] و بدون دور[۸] را در نظر گرفته و آن را به صورت یک گراف تصادفی جهت‌دار $G = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ مدل می‌کنیم که $\boldsymbol{V}$ مجموعه‌ی غیرتصادفی گره‌ها و $\boldsymbol{E}$ مجموعه‌ی تصادفی یالها می‌باشد. مجموعه تمامی یالهای گراف اعم از حذف شده یا موجود را با $\boldsymbol{E}^*$ نشان می‌دهیم و گراف $G^* = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E}^*)$ را گراف تام[۹] می‌نامیم.

فرض کنید Ω فضای نمونه‌ی تمامی رخدادهای حذف باشد. رخداد حذف شبکه را با متغیر تصادفی Z مدل کرده و اجازه می‌دهیم که Z توزیع دلخواهی روی Ω داشته باشد. در واقع رخدادهای حذف در یال‌های مختلف می‌توانند به هم وابسته باشند و در نتیجه هیچ‌گونه قیدی بر روی توزیع و یا نوع ارتباط بین رخداد حذف در یال‌های مختلف وجود ندارد. لیکن فرض می‌کنیم که شبکه بدون حافظه بوده و رخدادهای حذفی که در زمان‌های مختلف برای شبکه واقع می‌شوند، از هم مستقل می‌باشند.

رخدادی از گراف تصادفی که متناظر با رخداد حذف $Z = \zeta$ می‌باشد با $G(\zeta) = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E}(\zeta))$ نشان داده می‌شود که در آن $\boldsymbol{E}(\zeta)$ مجموعه یال‌های گراف است که حذف نشده‌اند. بنابر قرارداد رایج، فرض می‌کنیم که ظرفیت هر لینک موجود برابر یک واحد داده بر واحد زمان است.

در این مقاله به ظرفیت یک ارسال تک-مقصدی با گره‌ی منبع s و گره‌ی مقصد t می‌پردازیم. شکل (۲) بلوک دیاگرام این ارسال را نشان می‌دهد. به تفاوت میان گره‌های منبع و مقصد (که جزئی از شبکه هستند) و منبع و مقصد اصلی (که بیرون شبکه قرار دارند) توجه کنید. در اینجا شبکه به صورت یک کانال مخابراتی عمل می‌کند و هدف ما یافتن ظرفیت این کانال است. نکته‌ای که باید در نظر داشت آن است که بلوک‌های کدگذاری و کدبرداری موجود در شکل (۲) با کدگذاری و کدبرداری انجام شده در گره‌های شبکه تفاوت دارند.

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.8- No.2- Fall & Winter 2011
[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]



شکل (۲): دیاگرام بلوکی یک سیستم مخابراتی که در آن شبکه‌ی G به عنوان کانال مخابراتی بین گره‌ی منبع s و گره‌ی مقصد t عمل می‌کند.

در هر گره‌ی شبکه، واحد داده‌ی ارسالی بر روی یک یال خروجی از گره، بر حسب داده‌های حمل شده بر روی یالهای وارده به گره محاسبه می‌شوند. این عمل کدینگ شبکه نامیده می‌شود و عمل کدبرداری متناظر با آن در گره‌ی مقصد (و یا احتمالاً در گره‌های میانی) انجام می‌شود.

فرض کنید که γ_e کدینگ شبکه‌ی مربوط به e- اُمین لینک شبکه باشد. بنابراین $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{|E^*|})$ طرح کدینگ شبکه را برای تمامی لینکها مشخص می‌کند و فرض می‌کنیم که گره‌ی مقصد از نوع کدینگ γ آگاه است.

عمل کدبرداری که می‌تواند در گره‌ی مقصد t انجام شود ، به این بستگی دارد که آیا گره‌ی مقصد t از رخداد حذف Z آگاه است یا خیر. از دیدگاه عملی ، این اطلاعات را می‌توان از طریق سرآیند[۱۰] بسته به گره‌ی t منتقل کرد و اگر طول بسته ها افزایش یابد نسبت میزان افزودگی حاصل از سرآیند کمتر می شود. در این مقاله فرض می کنیم که گره‌ی t از رخداد حذفی که در هر لحظه بر شبکه واقع می شود ، آگاه است. در اصطلاح رایج [۱۳] به این اطلاعات ، اطلاعات جانبی می گویند. همانگونه که در ادامه نشان می‌دهیم ، در حالتی که کدهای شبکه خطی هستند، می‌توان اطلاعات جانبی را به فرمی فشرده‌تر به مقصد منتقل کرد.

آشکار است که رفتار کانال مخابراتی بین گره‌ی منبع s و گره‌ی مقصد t و همچنین ظرفیت این کانال به نوع کد شبکه γ بستگی دارد که برای شبکه انتخاب شده است.

به همین خاطر تعریف زیر را داریم:

تعریف ۱ : اگر G مدل گرافی یک شبکه حذفی با زوج منبع–مقصد (s,t) باشد و کدینگ شبکه ی γ برای آن استفاده شود، ظرفیت $C_{s\to t}(G,\gamma)$ بدین صورت تعریف می شود: سوپریمم همه ریت های R که با آن انتقال اطلاعات با احتمال خطای به اندازه کافی کوچک ممکن است، به فرض آنکه اطلاعات جانبی در گره‌ی مقصد موجود باشد.

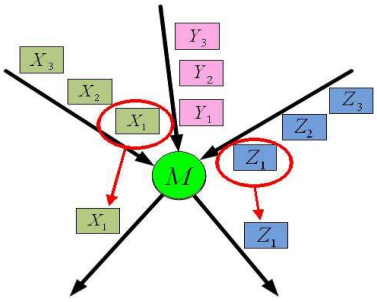
به عبارت دیگر،

$$C_{s\to t}(G,\gamma) = \max\ I(X;Y\mid Z) \qquad (۱)$$
$$= \max\ I(X;Y,Z)$$

که در آن X و Y به ترتیب خروجی کدگذار کانال و ورودی کدبردار کانال می‌باشند (شکل (۲)) و ماکزیمم‌گیری بر روی تمامی کدگذارهای کانال انجام می‌شود. تساوی دوم در (۱) از فرض موجه استقلال ورودی X از رخداد حذف حاصل می شود.

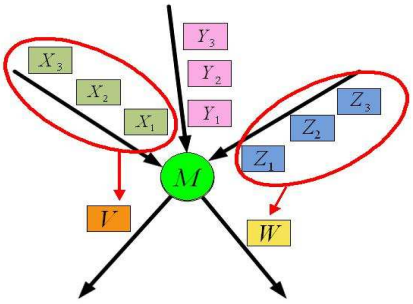
حال ماکزیمم ظرفیت بر روی کدینگ‌های مختلف شبکه محاسبه می‌شود و برای این کار ابتدا سه دسته از کدینگ‌های شبکه را تعریف و نامگذاری می‌کنیم.

- مسیریابی: در این دسته، محدودترین فرم کدینگ بر شبکه اعمال می‌شود. برای یک طرح مسیریابی مانند γ، داده ای که به هر یال اختصاص داده می‌شود، برابر است با یکی از داده های دریافتی توسط گره ی ابتدای یال (شکل (۳)). مجموعه‌ی همه طرحهای مسیریابی را با Γ^R نمایش می‌دهیم .



شکل (۳): نمایشی از روش مسیریابی

- کدینگ زمانی شبکه: به هر گره اجازه داده می شود که به ازای هر یال خروجی بسته های دریافتی از یک یال ورودی را ذخیره کند و سپس بر روی آنها عملیات کدینگ انجام دهد (شکل ۴). مجموعه‌ی همه طرحهای کدینگ زمانی شبکه را با Γ^{TC} نمایش می دهیم.

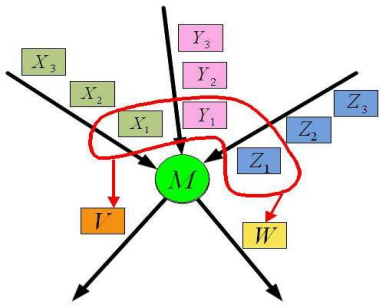


شکل (۴): نمایشی از کدینگ زمانی شبکه

- کدینگ فضایی شبکه: در این شیوه از کدینگ ، هر گره یک بسته از هر یال ورودی خود دریافت می‌کند و کدینگ را بر روی آنها انجام می‌دهد. در این شیوه از کدینگ گره اجازه ندارد که بر روی بسته‌های متوالی دریافت شده در زمان عملیاتی انجام دهد. بدین ترتیب جنبه زمانی کدینگ قابل استفاده نیست (شکل (۵)). مجموعه-ی همه طرحهای کدینگ فضایی شبکه را با Γ^{SC} نشان می دهیم.

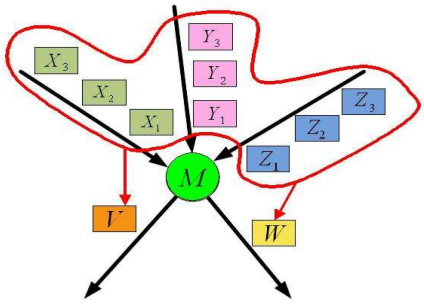
Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.8- No.2- Fall & Winter 2011

[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]



شکل (۵): نمایشی از کدینگ فضایی شبکه

- کدینگ عام شبکه: تمامی کدینگ‌های شبکه در این گروه قرار می‌گیرند و آن را با Γ نمایش می‌دهیم (شکل (۶)). در واقع هر دو جنبه‌ی زمانی و فضایی کدینگ در این حالت استفاده می شوند.



شکل (۶): نمایشی از کدینگ عام شبکه

بر اساس تعاریف فوق به وضوح می‌توان دید که:

$$\Gamma \supset \Gamma^{SC} \supset \Gamma^{R} \qquad (۲)$$
$$\Gamma \supset \Gamma^{TC} \supset \Gamma^{R}$$

تعریف ۲: فرض کنید که G مدل گرافی شبکه تصادفی حذفی باشد. در رابطه با زوج منبع–مقصد (s,t)، ظرفیت‌های $C_{s\to t}(G,\Gamma^{R})$ ، $C_{s\to t}(G,\Gamma^{TC})$ ، $C_{s\to t}(G,\Gamma^{SC})$ و $C_{s\to t}(G,\Gamma)$ را بدین ترتیب تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} C_{s\to t}(G,\Gamma^{R}) &= \sup_{\gamma\in\Gamma^{R}} C_{s\to t}(G,\gamma), \\ C_{s\to t}(G,\Gamma^{TC}) &= \sup_{\gamma\in\Gamma^{TC}} C_{s\to t}(G,\gamma), \\ C_{s\to t}(G,\Gamma^{SC}) &= \sup_{\gamma\in\Gamma^{SC}} C_{s\to t}(G,\gamma), \\ C_{s\to t}(G,\Gamma) &= \sup_{\gamma\in\Gamma} C_{s\to t}(G,\gamma). \end{aligned} \qquad (۳)$$

۲-۲- مروری بر دانسته‌های سابق

ابتدا حالت خاصی را در نظر می گیریم که در آن شبکه غیر تصادفی باشد. در این حالت جنبه‌ی زمانی کدینگ شبکه کمکی به افزایش ظرفیت نمی‌کند [۱۵]. به عبارت دیگر،

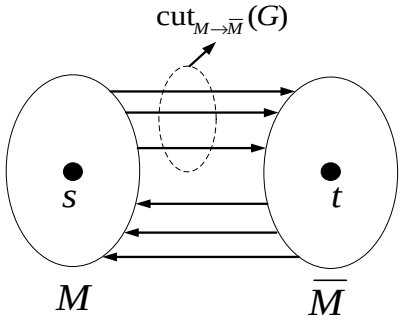
$$C_{s\to t}(G,\Gamma) = C_{s\to t}(G,\Gamma^{SC}) \qquad (۴)$$

ظرفیت یک ارسال تک-مقصدی و نیز یک ارسال چند-مقصدی در این حالت محاسبه شده است [۱۵]. برای بیان ظرفیت ابتدا تعاریف زیر ارائه می‌شود.

تعریف ۳: دو گره‌ی $s,t \in \boldsymbol{V}$ داده شده‌اند. یک برش[۱۱] (s,t)، تقسیم گره های $\boldsymbol{V}$ به دو مجموعه $M,\overline{M}$ است به گونه‌ای که $\boldsymbol{V} = M \cup \overline{M}$ و $s \in M$ ، $t \in \overline{M}$، که $\overline{M}$ مکمل مجموعه ای M است. مجموعه‌ی یال‌هایی را که از M خارج و به $\overline{M}$ وارد می‌شوند با $\mathrm{cut}_{M\to\overline{M}}(G)$ نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب می توان تعریف کرد:

$$\mathrm{cut}_{M\to\overline{M}}(G) = \left\{ e \in \boldsymbol{E} \mid \mathrm{tail}(e) \in M \,,\, \mathrm{head}(e) \in \overline{M} \right\} \qquad (۵)$$

در این توصیف منظور از $\mathrm{tail}(e)$ گره‌ی آغازین یال e و منظور از $\mathrm{head}(e)$ گره‌ی انتهایی یال e می‌باشد (شکل (۷)).



شکل ۷ : مثالی از یک برش و مفهوم $\mathrm{cut}_{M\to\overline{M}}(G)$

تعریف ۴: تعداد اعضای $\mathrm{cut}_{M\to\overline{M}}(G)$ اندازه‌ی برش $(M,\overline{M})$ نامیده می‌شود و آن را با $\mathrm{cutval}_{M\to\overline{M}}(G)$ نشان می‌دهیم (در صورتی که ظرفیت منتسب به یالها غیر واحد باشد، مجموع ظرفیت‌های اعضای $\mathrm{cut}_{M\to\overline{M}}(G)$ را $\mathrm{cutval}_{M\to\overline{M}}(G)$ می نامیم).

حال اگر تمامی برش‌های (s,t) ممکن در نظر گرفته شود و مینیمم روی تمامی اندازه‌ی برش‌ها حساب شود، کمیتی بدست می‌آید که مینیمم اندازه‌ی برش، $\mathrm{mincut}_{s\to t}(G)$، نامیده می‌شود. به عبارت دیگر،

$$\mathbf{mincut}_{s\to t}(G) = \min_{\{M:s\in M,\, t\in\overline{M}\}} (\mathbf{cutval}_{M\to\overline{M}}(G)) \qquad (۶)$$

در [۱۵] ثابت شده است که مستقل از نوع کدینگ شبکه، ظرفیت ارسال تک-مقصدی از s به t نمی‌تواند از مینیمم اندازه‌ی برش بیشتر شود. به عبارت دیگر، $C_{s\to t}(G,\Gamma) \le \mathrm{mincut}_{s\to t}(G)$.

سؤال طبیعی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا گره‌ی s قادر است اطلاعات را با ریت $\mathrm{mincut}_{s\to t}(G)$ به گره‌ی t منتقل کند یا خیر.

یک قضیه‌ی اساسی در نظریه گراف به وسیله Menger اثبات شده است و نشان داده که با عبور اطلاعات از مسیرهای موازی می‌توان به چنین ریتی دست یافت. یک مسیر[۱۲] در یک گراف جهت‌دار، دنباله‌ای از یالهای $e_1, e_2, \ldots, e_k$ است که $\mathrm{tail}(e_{i+1}) = \mathrm{head}(e_i)$. همچنین یک مجموعه از مسیرها، یال -

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.8- No.2- Fall & Winter 2011
[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]

متمایز[۱۳] نامیده می‌شوند هرگاه هیچ دو مسیری از مجموعه، یال مشترک نداشته باشند.

قضیه Menger : در یک گراف جهت‌دار G به تعداد $\text{mincut}_{s\to t}(G)$ مسیر یال ـ متمایز از گره‌ی s به گره‌ی t وجود دارد [۱۶].

هر مسیر از گره‌ی s به t در واقع یک مسیر انتقال داده را مشخص می کند و از آنجا که در روش مسیر یابی، می توان هر مسیر از s به t را برای ارسال یک بسته به گره‌ی مقصد t بکار گرفت، در نتیجه تعداد مسیرهای یال ـ متمایز بیانگر تعداد بسته‌های متمایزی است که از s به t حمل می‌شود. بنابراین با استفاده از قضیه Menger نتیجه‌ی زیر حاصل می شود.

نتیجه ۱ : در حالت ارسال تک-مقصدی، با استفاده از مسیریابی مناسب می‌توان به حداکثر ظرفیت انتقال داده، $\text{mincut}_{s\to t}(G)$، ازگره ی منبع s به گره ی مقصد t دست یافت. در نتیجه، در این حالت نیازی به کدینگ شبکه نیست.

$$C_{s\to t}(G,\Gamma)=C_{s\to t}(G,\Gamma^R)=\text{mincut}_{s\to t}(G) \qquad (۷)$$

حال مسأله چند-مقصدی را در نظر می گیریم. فرض کنید s گره‌ی منبع و $D=\{t_1,t_2,...,t_d\}$ مجموعه ی گره های مقصد در گراف غیر تصادفی G باشند. در این بخش علاقمندیم که ماکزیمم ریتی را بیابیم که با آن می‌توان اطلاعات یکسانی را از گره ی s به گره های $D=\{t_1,t_2,...,t_d\}$ انتقال داد. این کمیت که از تعمیم تعریف ۱ حاصل می‌شود، ظرفیت ارسال چند-مقصدی نامیده شده و آن را با $C_{s\to D}(G,\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

از آنجایی که اندازه ی هر برش (s,t)، یک کران بالا برای میزان اطلاعات انتقال یافته از s به t است، بنابراین $\min_{1\le i\le d}(\text{mincut}_{s\to t_i}(G))$ یک کران بالا برای ظرفیت چند-مقصدی می‌باشد.

مثال‌هایی از شبکه‌های چند-مقصدی وجود دارد که در آنها با استفاده از کدینگ شبکه، می توان به ظرفیتی دست یافت که هیچ یک از روش‌های مسیریابی قادر به کسب آن نباشند. قضیهٔ زیر که توسط Ahlswede [۱] ارائه شد، نتیجه‌ی اساسی نظریه کدینگ شبکه را بیان می‌کند.

قضیه Ahlswede: فرض کنید گراف $G=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ داده شده است. گره‌ی منبع s و مجموعه گره‌های مقصد $D=\{t_1,t_2,...,t_d\}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از کدینگ شبکه می‌توان به کران برشی چند-مقصدی یعنی $\min_{1\le i\le d}(\text{mincut}_{s\to t_i}(G))$ دست یافت. در نتیجه ظرفیت ارسال چند-مقصدی برابر است با :

$$C_{s\to D}(G,\Gamma)=\min_{1\le i\le d}(\text{mincut}_{s\to t_i}(G)) \qquad (۸)$$

در ارسال همه-مقصدی[۱۴] یک گره ی منبع s وجود داشته و بقیه گره‌ها یعنی $\boldsymbol{V}-\{s\}$، گره ی مقصد هستند. در واقع حالت ارسال همه-مقصدی حالت خاصی از ارسال چند-مقصدی است که در آن مجموعه رئوس مقصد برابر است با $D=\boldsymbol{V}-\{s\}$.

بنابراین نتایجی که در مورد حالت چند-مقصدی بدست آمد، برای ارسال همه-مقصدی نیز برقرار است. مطلبی که می‌خواهیم در اینجا نشان دهیم این است که در حالت همه-مقصدی، برای رسیدن به ظرفیت شبکه، نیازی به کدینگ شبکه وجود ندارد. به بیان دیگر، با روشهای مسیریابی متداول می‌توان ظرفیت شبکه را محقق کرد. این موضوع توسط قضیه Edmond در نظریهٔ گراف ثابت شده است. برای بیان قضیه لازم است که ابتدا به چند تعریف بپردازیم.

در نظریه گراف به یک گراف همبند بدون دور، یک درخت می‌گوییم. در یک درخت با یالهای جهت‌دار، ریشه‌ی درخت گره‌ای است که هیچ یالی به آن وارد نمی‌شود. حال توجه خود را به زیرگراف‌هایی از گراف G معطوف می‌کنیم که درخت باشند. اگر که یک درخت تمام گره های G را شامل شود آن را درخت فراگیر می نامیم و دو درخت فراگیر را یال- متمایز می گوییم اگر که هیچ یال مشترکی نداشته باشند.

قضیه Edmond : در یک گراف جهت‌دار $G=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$ می‌توان به تعداد $C_{s\to \boldsymbol{V}-\{s\}}(G,\Gamma)=\min_{v\in \boldsymbol{V}-\{s\}}(\text{mincut}_{s\to v}(G))$ درخت فراگیر یال ـ متمایز یافت که ریشه‌ی همگی آنها در s باشد.

آشکار است که هر درخت فراگیر که ریشه اش در s می باشد، راهی برای انتقال یک بسته از گره‌ی s به بقیه گره ها مشخص می‌کند. بنابراین در حالت ارسال همه-مقصدی، با یک الگوریتم مسیریابی که مبتنی بر ارسال اطلاعات از درختهای فراگیر یال ــ متمایز و ریشه‌دار در s است، می‌توان به ظرفیت $C_{s\to \boldsymbol{V}-\{s\}}(G,\Gamma)$ دست پیدا کرد. بنابراین کران بالای ظرفیت شبکه در ارسال همه-مقصدی با الگوریتم‌های مسیریابی قابل حصول بوده و کدینگ شبکه کمکی به افزایش ظرفیت نمی‌کند.

۲-۳- خلاصه‌ی نتایج این مقاله

در این مقاله به بررسی ظرفیت شبکه‌های حذفی می‌پردازیم. مثالی که در مقدمه ارائه شد، نشان می‌دهد که برای بعضی شبکه‌های حذفی نامساوی اکید زیر را داریم،

$$C_{s\to t}(G,\Gamma^{SC})>C_{s\to t}(G,\Gamma^R) \qquad (۹)$$

این مثال نشان می‌دهد که حتی در حالت ارسال تک-مقصدی نیز کدینگ فضایی شبکه می‌تواند ظرفیت بالاتری نسبت به روش‌های مسیریابی ارائه کند، موضوعی که در شبکه‌های غیر تصادفی وجود ندارد.

آنچه تا کنون در مورد ظرفیت شبکه های حذفی انجام شده است، محاسبه‌ی ظرفیت این شبکه‌ها در حالت ارسال نقطه-به-چندنقطه و در حضور کدینگ عام شبکه بوده است [۱۲].

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.8- No.2- Fall & Winter 2011

[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]

از آنجا که شبکه‌های نقطه-به-نقطه را می‌توان به عنوان حالت خاصی از شبکه های نقطه-به-چندنقطه در نظر گرفت، از نتایج [۱۲] می‌توان نتیجه گرفت که،

$$C_{s\to t}(G,\Gamma)=\mathbf{mincut}_{s\to t}(\overline{G}), \qquad (۱۰)$$

که در آن گراف میانگین $\overline{G}$ معادل است با گراف تام G^*، با این تفاوت که نرخ ارسال بر روی هر یال e برابر است با یک منهای احتمال حذف e. البته لازم به ذکر است تعریفی که از ظرفیت تحت کدینگ عام شبکه در [۱۲] ارائه شده است، اندکی با تعریف ما تفاوت دارد.

هدف اصلی ما در این مقاله آن است که ماکزیمم ظرفیت قابل حصول از طریق کدینگ فضایی شبکه، $C_{s\to t}(G,\Gamma^{SC})$، را بیابیم. در بخش بعدی ثابت می‌کنیم که $C_{s\to t}(G,\Gamma^{SC})$ برابر است با میانگین آماری روی مینیمم اندازه‌ی برش گراف تصادفی G. به عبارت دیگر،

$$C_{s\to t}(G,\Gamma^{SC})=E(\mathbf{mincut}_{\ s\to t}(G)) \qquad (۱۱)$$

با استفاده از این نتیجه، به محاسبه‌ی ظرفیت دسته‌ای مهم از شبکه‌های حذفی می‌پردازیم. ابتدا شبکه‌هایی را در نظر می‌گیریم که گراف شبکه به صورت یک گراف کامل، جهت‌دار و بدون دور بوده و گره‌های شبکه مستقل از هم در معرض رخداد حذف قرار می‌گیرند. نشان می‌هیم که ظرفیت این گراف تحت کدینگ فضایی شبکه و کدینگ عام شبکه برابر بوده و در نتیجه کدینگ زمانی شبکه کمکی به افزایش ظرفیت در این حالت نمی‌کند. در ادامه فرض می‌کنیم که یالهای گراف کامل، جهت‌دار و بدون دور، مستقل از هم دچار حذف شود. با استفاده از شبیه‌سازی به مقایسه‌ی ظرفیت این شبکه تحت کدینگ فضایی و کدینگ عام شبکه می‌پردازیم.

۳- ظرفیت شبکه برای ارسال تک- مقصدی

در این بخش به اثبات (۱۱) می‌پردازیم و برای حصول به آن از روند زیر تبعیت می‌کنیم. ابتدا زیر مجموعه‌ای از Γ^{SC} را در نظر می‌گیریم که از کدهای فضایی خطی شکل گرفته است و نشان می‌دهیم که با یکی از این کدها می‌توان به ظرفیت ارائه شده در (۱۱) دست یافت. سپس ثابت می‌کنیم که برای هیچ کدی در Γ^{SC} ظرفیتی بیش از (۱۱) حاصل نمی‌شود.

برای تعریف کدهای فضایی خطی برای گراف تصادفی G، واحد داده‌ی حمل شده توسط یال e، $d(e)$، را به عنوان عضوی از میدان F_q در نظر می‌گیریم، $d(e)\in F_q\ ,\forall e\in \boldsymbol{E}$.

همچنین، ورودی X به شبکه را به صورت دسته ای از k واحد داده در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $k=\mathbf{mincut}_{s\to t}(G^*)$. در نتیجه یکی از رخدادهای X را می‌توان به فرم $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_k)$، $x_i\in F_q$، $1\le i\le k$، نشان داد.

فرض کنید که γ یک کد فضایی خطی برای گراف جامع G^* باشد [۱۵]. واحد داده‌ی $d(e)$ برای هر یال e بدین طریق محاسبه می‌شود:

$$d(e)=\sum_{i=1}^{n_e} d(f_i).\alpha_{e,i} \qquad (۱۲)$$

که در آن $f_1, f_2, ..., f_{n_e}$ یال‌هایی از G^* هستند که به گره‌ی آغازین e ختم می‌شوند و $\alpha_{e,i}$، $1\le i\le n_e$، ضرایب دلخواهی هستند که از F_q انتخاب می‌شوند. اگر گره‌ی آغازین e همان گره‌ی منبع باشد، در (۱۲)، $d(f_i)=x_i$ و $n_e=k$ قرار داده می‌شود. بنابراین کد خطی γ را می‌توان با مجموعه ضرایب $L=\{\alpha_{e,i}:1\le i\le n_e, e\in E^*\}$ به طور کامل مشخص کرد.

حال تعریف کد فضایی γ را به یک گراف تصادفی G تعمیم می‌دهیم. برای این منظور هر گاه یال f_i حذف شود، داده‌ی حمل شده توسط آن را صفر در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر، برای استفاده از (۷)،

$$d(f_i)=0 \ :\ \text{اگر } f_i \text{ حذف شود} \qquad (۱۳)$$

حال رخداد حذف $Z=\zeta$ را در نظر بگیرید. گراف متناظر با این رخداد را $G(\zeta)$ می‌نامیم. کد γ که برای گراف تصادفی G تعریف می‌شود، برای هر رخداد ζ، کدی را برای $G(\zeta)$ القاء می‌کند که آن را با $\gamma(\zeta)$ نمایش می‌دهیم.

از (۱۲) و (۱۳) مشاهده می‌شود که $\gamma(\zeta)$ یک کد خطی برای گراف غیرتصادفی $G(\zeta)$ می‌باشد. مجموعه ضرایب متناظر با $\gamma(\zeta)$، زیر مجموعه‌ای از L است که برای حصول آن می‌توان از L، ضرایب $\alpha_{e,i}$ هایی را حذف کرد که یال e و یا یال f_i که به گره‌ی آغازین e وارد شده است، حذف شده باشد.

در نهایت گره‌ی مقصد t را در نظر بگیرید و فرض کنید که l یال در G^* به t وارد شوند. واضح است که $l\ge \mathbf{mincut}_{s\to t}(G^*)$.

داده‌های حمل شده روی این یال‌ها را با بردار U و یک رخداد از آن را با $\vec{u}=(u_1,u_2,...,u_l)$ نشان می‌دهیم. مانند قبل، اگر یکی از این یال‌ها حذف شود، u_i متناظر با آن را صفر در نظر می‌گیریم.

می‌توان U را بر حسب ترکیب خطی از X نشان داد [۱۵]:

$$U=AX \qquad (۱۴)$$

که در آن A ماتریس عمومی کدگذاری بوده و از روی مجموعه ضرایب L قابل حصول می‌باشد. واضح است که در حالتی که گراف شبکه تصادفی باشد، ماتریس A نیز تصادفی بوده و به رخداد حذف بستگی پیدا می‌کند. می‌توان ماتریس A را به فرم $A(\gamma,\zeta)$ نوشت تا وابستگی آن به رخداد حذف ζ و کد γ عیان شود.

هر سطر A متناظر با یک یال وارده به t می باشد و در سرآیند بسته‌ی دریافتی توسط t وجود دارد [۱۵]. آشکار است که وقتی طول بسته به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، اندازه‌ی سرآیند در مقایسه با طول

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.8- No.2- Fall & Winter 2011
[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]

بسته قابل صرف نظر است. همانگونه که در ادامه نشان داده می‌شود، در حالتی که به کدهای خطی محدود هستیم، اطلاعات اضافی که برای کدبرداری در t نیاز است به ماتریس $A(\gamma,\zeta)$ خلاصه می‌شود و نیازی به آگاهی از رخداد حذف ζ نیست.

تعریف ۵: کد γ را برای گراف G و تحت رخداد حذف $Z=\zeta$ معتبر می‌گوییم اگر

$$\mathbf{rank}(A(\gamma,\zeta))=\mathbf{mincut}_{s\to t}(G(\zeta)) \qquad (۱۵)$$

حال این سوال مطرح می‌شود که آیا کدی چون γ وجود دارد که برای هر رخداد حذف $\zeta\in\Omega$ برای گراف G معتبر باشد. دو لم بعدی به این سوال پاسخ می‌دهند.

لم ۱: اگر تعداد کدهای خطی γ که تحت رخداد حذفی ζ برای گراف G معتبر نمی‌باشد با $N_{ic}(G(\zeta))$ نشان داده شود، آنگاه،

$$N_{ic}(G(\zeta))\le N_t(1-(1-\frac{1}{q})^{|E(\zeta)|}) \qquad (۱۶)$$
$$\le N_t(1-(1-\frac{1}{q})^{|E^*|}),$$

که در آن N_t کل تعداد کدهای خطی است که می‌توان برای G^* روی میدان F_q تعریف کرد.

اثبات این لم از روی نتایج [۶] به آسانی امکان پذیر است و برای اختصار حذف می شود.

لم ۲: برای میدان به اندازه‌ی کافی بزرگ F_q، کد خطی $\bar{\gamma}$، وجود دارد که تحت تمامی رخدادهای حذف $\zeta\in\Omega$ معتبر می‌ماند.

اثبات: تعداد کدهای خطی γ که برای آنها گراف تصادفی G حداقل تحت یک رخداد حذف ζ نامعتبر می‌شود را با $N_{ic}(G)$ نشان می‌دهیم. با توجه به لم ۱، واضح است که،

$$N_{ic}(G)\le\sum_{\zeta\in\Omega}N_{ic}(G(\zeta)) \qquad (۱۷)$$
$$\le|\Omega|\,N_t(1-(1-\frac{1}{q})^{|E^*|}).$$

با انتخاب $q>\dfrac{1}{1-(1-\frac{1}{|\Omega|})^{1/|E^*|}}$ خواهیم داشت $N_t-N_{ic}(G)>0$ و اثبات کامل می‌شود.

لم ۳: $C_{s\to t}(G,\Gamma^{SC})\ge E(\mathbf{mincut}_{s\to t}(G))$.

اثبات: گراف G را همراه با کد خطی $\bar{\gamma}$ در نظر بگیرید. برای کدبرداری، گره‌ی t بردار U و اطلاعات جانبی A را به کدبردار ارسال می‌کند. با اندکی اغماض بردار دریافتی توسط کد بردار را با $Y=(U,A)$ نشان می‌دهیم.

حال فرض می‌کنیم که X دارای توزیع یکنواخت روی q^k حالت ممکن می‌باشد و اطلاعات متقابل $I(X;Y)$ را حساب می‌کنیم.

$$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y) \qquad (۱۸)$$
$$=k.\log q-H(X|U,A)$$
$$=k.\log q-\sum_{\zeta\in\Omega}H(X|U,A=A(\bar{\gamma},\zeta))P(\zeta).$$

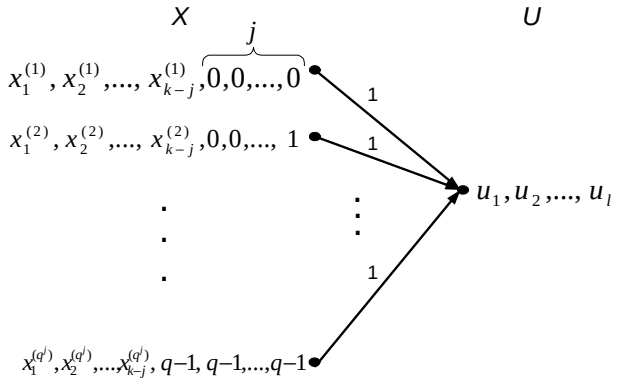
از آنجایی که $\bar{\gamma}$ تحت تمامی رخدادهای حذف ζ معتبر می‌ماند،

$$\mathbf{rank}(A(\bar{\gamma},\zeta))=\mathbf{mincut}_{s\to t}(G(\zeta))\le k \qquad (۱۹)$$

تعریف می‌کنیم $j=k-\mathbf{mincut}_{s\to t}(G(\zeta))$. رابطه‌ی (۱۴) را برای حالت $A=A(\bar{\gamma},\zeta)$ در نظر بگیرید. در این معادله $k-j$ متغیر وابسته وجود دارند که می‌توان آن‌ها را بر حسب U و j متغیر آزاد باقیمانده در X بیان کرد.

برای رخداد حذف ζ، نگاشتی که X را به U می‌برد در شکل (۸) نشان داده شده است. در این شکل فرض شده است که $X_1, X_2, ..., X_{k-j}$ متغیرهای وابسته باشند. از این شکل مشاهده می‌شود که با داشتن U، به تعداد q^j امکان متساوی‌الاحتمال برای X موجود است. در نتیجه،

$$H(X|U,A=A(\bar{\gamma},\zeta))=j.\log q \qquad (۲۰)$$



شکل (۸): نگاشت از X به U تحت یک رخداد حذف

از آنجا که $j=k-\mathbf{mincut}_{s\to t}(G(\zeta))$، با توجه به (۱۰) داریم،

$$I(X;Y)=\sum_{j=0}^{k}(k.\log q-j.\log q)P(\mathbf{rank}(A)=k-j)$$
$$=\log q.\sum_{j=0}^{k}(k-j)P(\mathbf{mincut}_{s\to t}(G)=k-j) \qquad (۲۱)$$
$$=\log q.E(\mathbf{mincut}_{s\to t}(G))$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که:

$$C_{s\to t}(G,\bar{\gamma})\ge E(\mathbf{mincut}_{s\to t}(G)) \qquad (۲۲)$$

و با استفاده از تعریف ۲، لم ثابت می‌شود. توجه به این نکته حائز اهمیت است که در رابطه‌ی فوق جمله $\log q$ حذف شده است و دلیلش آن است که ظرفیت بر حسب تعداد واحد داده بر واحد زمان بیان شده است در حالی که اطلاعات مقابل بر حسب بیت بر ثانیه می باشد.

لم ۴: $C_{s\to t}(G,\Gamma^{SC})\le E(\mathbf{mincut}_{s\to t}(G))$.

[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]

اثبات : کد خطی دلخواه γ را برای G در نظر بگیرید و فرض کنید که بردار X دارای توزیع دلخواهی باشد. توجه کنید که،

$$I(X;Y)=H(X)-H(X\mid Y) \qquad (۲۳)$$
$$\le H(X\mid Z)-H(X\mid Y,Z)=I(X;Y\mid Z)$$

در این رابطه، قسمت نامساوی از استقلال X و Z نتیجه می‌شود. برای رخداد حذف $Z=\zeta$، برشی را با مینیمم اندازه‌ی برش برای $G(\zeta)$ در نظر می‌گیریم. داده‌هایی را که بر روی یالهای این برش حمل می‌شوند با W نمایش داده و با توجه به غیردوری بودن گراف $G(\zeta)$ نتیجه می‌گیریم که،

$$P(Y\mid X,W,Z=\zeta)=P(Y\mid W,Z=\zeta) \qquad (۲۴)$$

و در نتیجه،

$$I(X;Y\mid Z=\zeta)\le I(X;W\mid Z=\zeta) \qquad (۲۵)$$
$$\le H(W\mid Z=\zeta)$$
$$\le \log q.\,\mathbf{mincut}_{s\to t}(G(\zeta)),$$

که نامساوی آخر بدان جهت برقرار است که بردار W دقیقاً $\mathbf{mincut}_{s\to t}(G(\zeta))$ درایه دارد و هر درایه می‌تواند یکی از q مقدار ممکن را اخذ کند. در نهایت، با توجه به معادله‌ی (۲۳)،

$$I(X;Y)\le I(X;Y\mid Z)=\sum_{\zeta\in\Omega} I(X;Y\mid Z=\zeta)P(Z=\zeta) \qquad (۲۶)$$
$$\le \log q.E(\mathbf{mincut}_{s\to t}(G)).$$

از آنجایی که (۲۶) برای هر کد $\gamma\in\Gamma^{SC}$ و هر توزیع ورودی برقرار است، اثبات لم نیز کامل می‌شود.

با توجه به لم ۳ و لم ۴، قضیه‌ی زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۱: شبکه‌ی حذفی نقطه- به- نقطه‌ای را در نظر بگیرید که توسط گراف تصادفی G مدل شده است. حال یک ارسال تک-مقصدی را با گره‌ی منبع s و گره‌ی مقصد t در G فرض کنید. مشروط بر آنکه اطلاعات رخداد حذف به صورت اطلاعات جانبی در اختیار گره‌ی مقصد t قرار بگیرد، ظرفیت ارسال تک-مقصدی تحت کدینگ فضایی شبکه برابر است با،

$$C_{s\to t}(G,\Gamma^{SC})=E(\mathbf{mincut}_{s\to t}(G)) \qquad (۲۷)$$

و این ظرفیت از طریق یک کد خطی قابل حصول است.

۴- ظرفیت شبکه‌های حذفی با گراف کامل تحت کدینگ فضایی شبکه

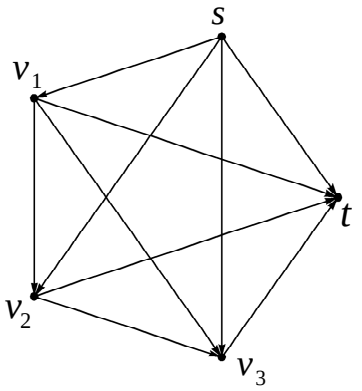
در این بخش، با استفاده از نتایج حاصل در بخش قبلی ظرفیت یک ارسال تک پخشی را در دسته‌ای مهم از شبکه های حذفی تحت کدینگ فضایی شبکه محاسبه می کنیم. در ابتدا شبکه ای را در نظر می‌گیریم که در آن گراف شبکه کامل، جهت‌دار و بدون دور بوده و هر گره مستقل از گره‌های دیگر دچار رخداد حذف می‌شود. ظرفیت این شبکه را تحت کدینگ فضایی شبکه به دست آورده و نشان می‌دهیم که با ظرفیت شبکه تحت کدینگ عام شبکه برابر است. به عبارت دیگر، در این نوع شبکه کدینگ زمانی کمکی به افزایش ظرفیت نمی-کند. در ادامه شبکه‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن لینک‌ها تصادفی بوده و هر لینک مستقل از دیگر لینک‌ها دچار رخداد حذف می شود. در این حالت، برای به دست آوردن ظرفیت تحت کدینگ فضایی شبکه به شبیه سازی پرداخته و نتایج حاصل را با ظرفیت شبکه تحت کدینگ عام شبکه مقایسه می کنیم.

۴-۱- ظرفیت شبکه با گره‌های تصادفی

گراف کامل جهت دار و بدون دور G_n^* را با گره‌های منبع و مقصد s و $v_1,v_2,\dots,v_n$ در نظر گرفته و فرض می‌کنیم که گره‌های $v_1,v_2,\dots,v_n$ به عنوان گره‌های واسط به انتقال اطلاعات از s به t کمک می کنند. اگر از e_{v_1,v_2} برای نمایش یک یال جهت دار از v_1 به v_2 استفاده شود، یالهای G_n^* عبارتند از:

$$e_{s,v_i},1\le i\le n$$
$$e_{v_i,t},1\le i\le n$$
$$e_{v_i,v_j},1\le i<j\le n$$
$$e_{s,t}$$

در شکل (۹) گراف G_3^* رسم شده است.



شکل (۹): گراف G_3^*

لم ۵ : $\mathbf{mincut}_{s\to t}(G_n^*)=n+1$.

اثبات: برش $M_0=\{s\}$ و $\overline{M_0}=\{v_1,v_2,\dots,v_n,t\}$ را در نظر بگیرید. برای این برش $\mathrm{cutval}_{M_0\to\overline{M_0}}(G_n^*)=n+1$ می-باشد. حال برش دلخواه M و $\overline{M}$ را در نظر بگیرید. یالهای $\{e_{s,v_i}:v_i\in\overline{M}\}$ و $\{e_{v_j,t}:v_j\in M\}$ به برش $\mathrm{cut}_{M\to\overline{M}}(G_n^*)$ تعلق دارند. همچنین $e_{s,t}$ تنها عضو مشترک دو مجموعه است. بنابراین،

$$\mathrm{cutval}_{M\to\overline{M}}(G_n^*)\ge |M|+|\overline{M}|-1 \qquad (۲۸)$$

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.8- No.2- Fall & Winter 2011
[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]

با توجه به آنکه $|M|+|\overline{M}|=n+2$ ، نتیجه می گیریم که برش M_0 و $\overline{M_0}$ همان برش مینیمم بوده و $\mathbf{mincut}_{s\to t}(G_n^*)=n+1$.

حال فرض کنید که گره های $v_1, v_2, \ldots, v_n$ مستقل از هم و با احتمال ε حذف می‌شوند. آشکار است که با حذف هر گره تمامی یالهای ورودی و خروجی آن حذف می‌شوند. گراف تصادفی حاصل را G_n نامیده و ظرفیت آن را تحت کدینگ فضایی شبکه به دست می‌آوریم.

قضیه ۲: ظرفیت G_n تحت کدینگ فضایی شبکه و کدینگ عام شبکه یکسان بوده و برابر است با $n(1-\varepsilon)+1$.

اثبات: از آنجا که در بخش قبل وجود هر نوع همبستگی بین رخداد حذف در یالهای متمایز مقدور بود، می‌توان برای محاسبه‌ی ظرفیت G_n تحت کدینگ فضایی شبکه از رابطه‌ی (۲۷) یاری گرفت.

$$C_{s\to t}(G_n,\Gamma^{SC})=E(\mathbf{mincut}_{s\to t}(G_n)) \qquad (۲۹)$$

فرض کنید که تحت رخداد حذف ζ، به تعداد k از گره‌های $v_1, v_2, \ldots, v_n$ باقی مانده و بقیه حذف شوند. گراف حاصل، $G_n(\zeta)$، با گراف G_k^* یکریخت است و بر اساس لم ۵،

$$\mathbf{mincut}_{s\to t}(G_n(\zeta))=\mathbf{mincut}_{s\to t}(G_k^*)=k+1 \qquad (۳۰)$$

با توجه به آنکه احتمال حذف نشدن k گره از n گره برابر است با $\binom{n}{k}(1-\varepsilon)^k\varepsilon^{n-k}$،

$$E(\mathbf{mincut}_{s\to t}(G_n))=\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}(1-\varepsilon)^k\varepsilon^{n-k} \qquad (۳۱)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}(1-\varepsilon)^k\varepsilon^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-\varepsilon)^k\varepsilon^{n-k}$$

جمله‌ی اول میانگین یک متغیر دو جمله‌ای با پارامترهای n و $1-\varepsilon$ است و برابر $n(1-\varepsilon)$ می‌شود. جمله‌ی دوم نیز مجموع احتمالات یک متغیر دوجمله‌ای بوده که برابر ۱ است. در نتیجه،

$$C_{s\to t}(G_n,\Gamma^{SC})=E(\mathbf{mincut}_{s\to t}(G_n))=n(1-\varepsilon)+1 \qquad (۳۲)$$

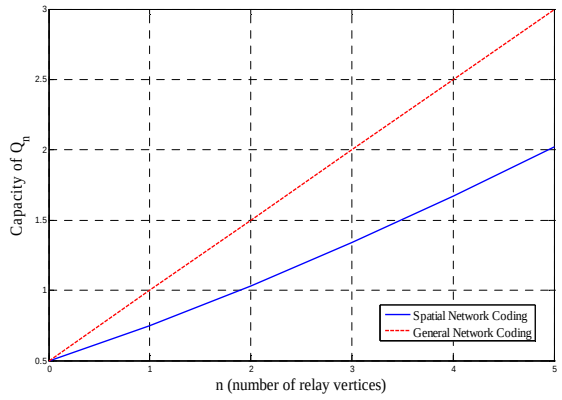
برای محاسبه‌ی ظرفیت تحت کدینگ عام شبکه ابتدا گراف میانگین $\overline{G_n}$ را محاسبه کرده و سپس با استفاده از (۱۰) ظرفیت را محاسبه می‌کنیم. با توجه به آنکه احتمال حذف یالهای $\{e_{s,v_i}, 1\le i\le n\}$ و $\{e_{v_i,t}, 1\le i\le n\}$ برابر ε می باشد، در گراف $\overline{G_n}$، این یالها را با یالهای غیر حذفی با ظرفیت $1-\varepsilon$ جایگزین می‌کنیم. مشابه روش ارائه شده در لم ۵، نشان داده می شود که،

$$C_{s\to t}(G_n,\Gamma)=\mathbf{mincut}_{s\to t}(\overline{G_n})=n(1-\varepsilon)+1 \qquad (۳۳)$$

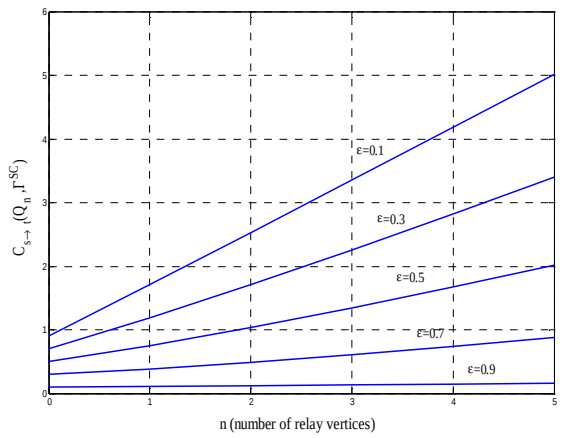
و از تساوی (۳۲) و (۳۳) نتیجه می‌گیریم که کدینگ فضایی شبکه در این حالت کفایت می‌کند و نیازی به کدینگ زمانی نمی‌باشد.

۴-۲- ظرفیت شبکه با یالهای تصادفی

همانند بخش قبل گراف کامل جهت دار و بدون دور G_n^* را در نظر بگیرید. اگر یالهای G_n^* مستقل از هم و با احتمال ε حذف شوند، یک گراف تصادفی حاصل می‌شود که آن را Q_n می نامیم. در این حالت به وسیله‌ی شبیه سازی ظرفیت Q_n را تحت کدینگ فضایی شبکه از رابطه‌ی (۲۷) به دست می‌آوریم. از آنجا که تعداد یالهای G_n^* برابر $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ است، $|\Omega|$ یعنی تعداد رخدادهای حذف Q_n برابر $2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ می شود. به همین خاطر شبیه سازی برای n های بزرگ انجام نمی‌شود. همچنین همانند بخش قبل می‌توان نشان داد که ظرفیت Q_n تحت کدینگ عام شبکه برابر $\mathbf{mincut}_{s\to t}(\overline{Q_n})=(n+1)(1-\varepsilon)$ می باشد. در شکل (۱۰) ظرفیت Q_n تحت کدینگ فضایی شبکه و کدینگ عام شبکه برای حالت $\varepsilon=0.5$ رسم شده است و در شکل (۱۱) تاثیر تغییر ε در ظرفیت شبکه تحت کدینگ فضایی شبکه بررسی شده است.



شکل (۱۰): مقایسه بین ظرفیت تحت کدینگ فضایی شبکه و کدینگ عام شبکه برای $\varepsilon=0.5$



شکل (۱۱): ظرفیت تحت کدینگ فضایی شبکه برای ε های مختلف

[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]

۵- نتیجه‌گیری

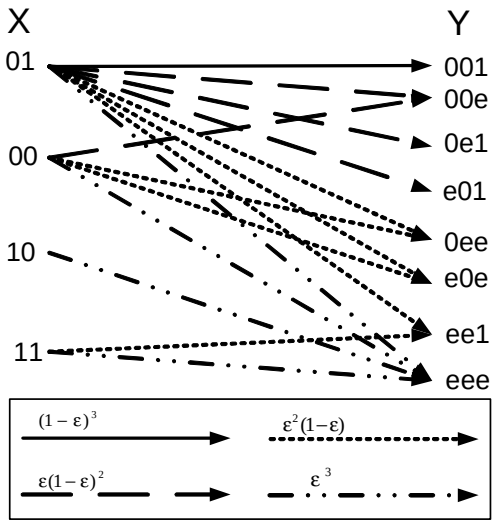
در این مقاله، ظرفیت شبکه های حذفی نقطه- به- نقطه در حضور کدینگ فضایی شبکه و در حالت ارسال تک-مقصدی به دست آمد. ثابت کردیم که ظرفیت در این حالت برابر است با میانگین آماری روی مینیمم اندازه‌ی برش گراف تصادفی شبکه، یعنی $E(\mathbf{mincut}_{s\to t}(G))$. همچنین نشان دادیم که این ظرفیت ازطریق کدینگ خطی شبکه قابل حصول است. به علاوه به عنوان یک نتیجه‌ی جانبی ثابت کردیم که در شبکه های حذفی و در ارسال تک-مقصدی، استفاده از کدینگ فضایی شبکه ما را به ظرفیتی بیش از مسیریابی می‌رساند، موضوعی که در مورد شبکه های غیر حذفی صادق نیست.

در ادامه و با استفاده از روابط مستخرج، به محاسبه‌ی ظرفیت در شبکه‌هایی پرداختیم که در آنها گراف شبکه به صورت گراف کامل، جهت‌دار و بدون‌دور می باشد، لیکن گره‌ها به طور مستقل از هم تحت رخداد حذف قرار می‌گیرند. نشان دادیم که ظرفیت تحت کدینگ فضایی شبکه با ظرفیت تحت کدینگ عام شبکه برابر است. این موضوع نشان می‌دهد که در این شبکه‌ها نیازی به کدینگ زمانی نمی‌باشد.

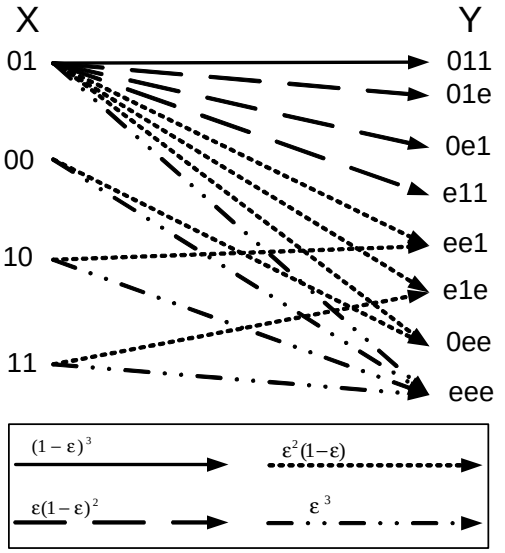
ضمایم

شبکه‌ی نشان داده شده در شکل (۱) را می توان از دید گره‌ی منبع s و گره‌ی مقصد t، مدل‌سازی کرد. فرض می‌کنیم که یالهای e_5, e_4, e_3 به صورت مستقل از هم و با احتمال ε در معرض حذف قرار می گیرند.

شکل (۱۲)، مدل کانال را برای حالتی نشان می دهد که مقید به مسیریابی هستیم و پیام‌های x_2, x_1, x_1 بر روی e_5, e_4, e_3 ارسال می‌شود و شکل (۱۳)، برای حالتی است که امکان کدینگ به گره اضافه می شود و پیام‌های $x_1 \oplus x_2, x_2, x_1$ به ترتیب روی e_5, e_4, e_3 ارسال می شود. در هر دو شکل برای افزایش وضوح، تنها ۸ خروجی از ۲۷ خروجی ممکن Y را در نظر گرفته ایم که از $X = 01$ قابل حصول هستند. با اندکی دقت مشاهده می‌شود که هر دو کانال متقارن بوده و در نتیجه با یک توزیع یکنواخت روی چهار مقدار X به ظرفیت می‌رسیم. به آسانی می‌توان نشان داد که در حالت مسیر یابی ظرفیت برابر $C_1 = 2 - \varepsilon^2 - \varepsilon$ می باشد و در حالت کدینگ فضایی شبکه، ظرفیت $C_2 = 2 - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3$ می-شود.



شکل (۱۲): مدل کانال گسسته برای شبکه‌ی شکل (۱) تحت مسیریابی



شکل (۱۳): مدل کانال گسسته برای شبکه‌ی شکل (۱) تحت کدینگ شبکه

مراجع

[1] Ahlswede, R., Cai, N., Li, R., Yeung, R.W., *"Network information flow"* , IEEE Trans. on Information Theory, July 2000.

[2] Li, S.Yen R., Yeung, R.W., Cai, N., *"Linear Network Coding"*, IEEE Trans. on Info. Theory, Vol. 49, February 2003.

[3] Doughtery, R., Freiling, C., Zeger, K., *"Insufficiency of linear coding in network information flow"*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 51, no. 8, pp. 2745-2759, Aug. 2005.

[4] Koetter, R., Medard, M., *"An algebraic approach to network coding"*, IEEE/ACM Trans. Networking, Oct. 2003.

[5] Agarwal, A., Charikar, M., *"On the advantage of network coding for improving network throughput"*, in proc. 2004 IEEE Information theory workshop, San antonio, TX, pp. 247-249, Oct. 2004.

Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers - Vol.8- No.2- Fall & Winter 2011
[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]

[6] Ho, T., Medard, M., Koetter, R., Karger, D. R., Effros, M., Shi, J., Leong, B., *"Toward a random operation of networks"*, IEEE Trans. on Information Theory, 2004.
[7] Fragouli, C., Widmer, J., Le Boudec, J.Y., *"A network coding approach to energy efficient broadcasting: from theory to practice"*, Infocom 2006.
[8] Widmer, J., Fragouli, C., Le Boudec, J.Y., *"Energy efficient broadcasting in wireless ad-hoc networks using network coding"*, First Workshop on Network Coding, 2005.
[9] Widmer, J., Fragouli, C., Le Boudec, J.Y., *"Low-complexity energy-efficient broadcasting in wireless ad-hoc networks using network coding"*, Proc. Workshop on Network Coding, Theory, and Applications, 2005
[10] Wu, Y.C., Kung, P., *"Minimum-energy multicast in mobile ad hoc networks using network coding"*, IEEE Transactions on Communications, Volume: 53, Issue: 11, 2005.
[11] Ramamoorthy, A., Shi, J., Wesel, R.D., *"On the capacity of network coding for random networks"*, IEEE Transactions on Information Theory, Volume: 51, Issue: 8, 2005.
[12] Dana, A.F., Gowaikar, R., Palanki, R., Hassibi, B., Effros, M., *"Capacity of wireless erasure networks"*, IEEE Transactions on Information Theory, Volume: 52, Issue: 3, 2006.
[13] Gastpar, M., Vetterli, M., *"On the capacity of wireless networks: the relay case"*, INFOCOM 2002, Twenty-First Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies, 2002.
[14] Salmasi, M., Golestani, S.J., "*Capacity of erasure networks in the presence of spatial network coding*", in Proc. IEEE Information Theory Workshop, Tahoe City, CA, Sep 2007.
[15] Yeung, R.W., *Information theory and network coding*, Springer, 2008.

زیرنویس‌ها

[1]Routing
[2]Network coding
[3]Multicast
[4]Unicast
[5]Erasure networks
[6]Point-to-point
[7]Erasure
[8]Acyclic
[9]Full graph
[10]Header
[11]Cut
[12]Path
[13]Edge-disjoint
[14]Broadcast

[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]

Capacity of Erasure Networks under Spatial Network Coding

M. Salmasi[1] S.J. Golestani[2]

[1] PhD Candidate, Department of Electrical and Computer Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran
salmasi@ec.iut.ac.ir

[2]Assistant Professor, Department of Electrical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran
golestani@ieee.org

Abstract:

We study the capacity of point-to-point erasure networks under a restricted form of network coding to which we refer as spatial network coding. In this form of coding, the nodes can not perform coding on successive packets which are received from one incoming link. The coding at a node is restricted to the packets received at the same time slot from different incoming links to the node. In other words, the temporal aspect of coding is absent.

We prove that the capacity of a unicast session under spatial network coding is the statistical average of the minimum cut of the random graph corresponding to the erasure network. Then, we consider a network with a complete, directed and acyclic graph in which the nodes are erased independently. We prove that the capacity of the network under spatial network coding is the same as its capacity under general network coding. This shows that temporal coding has no improving effect for this network. Finally, we compare the capacities under different coding schemes for the complete graph with the edges that are erased independently.

Keywords: Network Coding, Erasure Network, Capacity, Spatial Network Coding

Submission date: 05 Apr., 2010

Acceptance date: 28 Nov., 2010

Corresponding author: Mehrdad Salmasi

Corresponding author's address: Wireless Communications Lab., Department of Electrical and Computer Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran.

[Downloaded from jiaeee.com on 2025-12-21]