

# بهبود تخمین ناحیه جذب سیستم‌های غیرخطی بر اساس تولید دنباله توابع لیاپانوف

مژده حیدری<sup>۱</sup> وحید میگلی<sup>۲</sup> ابوالحسن رزمی‌نیا<sup>۳</sup>

۱- دانشجوی دکتری- گروه مهندسی برق- دانشکده مهندسی- دانشگاه خلیج فارس- بوشهر- ایران  
[heydarimojdeh69@gmail.com](mailto:heydarimojdeh69@gmail.com)

۲- استادیار- گروه مهندسی برق- دانشکده مهندسی- دانشگاه خلیج فارس- بوشهر- ایران  
[meigoli@pgu.ac.ir](mailto:meigoli@pgu.ac.ir)

۳- دانشیار- آزمایشگاه سیستم‌های دینامیکی و کنترل، - گروه مهندسی برق- دانشکده مهندسی- دانشگاه خلیج فارس- بوشهر- ایران  
[razminia@pgu.ac.ir](mailto:razminia@pgu.ac.ir)

**چکیده:** روش لیاپانوف یک روش مؤثر در اثبات پایداری نقاط تعادل سیستم‌های دینامیکی است. یکی از کاربردهای تحلیل لیاپانوف، تخمین ناحیه جذب است. در حالت کلی، بسته به فرم تابع لیاپانوف انتخابی، بخشی از ناحیه جذب تخمین زده می‌شود که لزوماً بهترین تخمین نیست. در این مقاله، با ارائه یک الگوریتم تولید توابع کاندید لیاپانوف، به صورت دنباله‌ای، روشی پیشنهاد می‌گردد که از طریق آن، در هر گام رو به جلو، تخمین ناحیه جذب، نسبت به مرحله قبل، بهبود می‌یابد. ایده اساسی تولید اعضای دنباله مزبور، ترکیب خطی تابع کاندید لیاپانوف با مشتق آن، جهت ساختن یک تابع لیاپانوف جدید است. متناظر با هر تابع کاندید لیاپانوف، یک ناحیه جذب حاصل می‌شود که در فرایند تولید توابع جدید، هر ناحیه جذب تخمین زده شده، زیرمجموعه تخمین بعدی است. در پایان برای نشان دادن توانایی نتایج نظری به دست آمده، چند مثال عددی شبیه‌سازی شده است.

**واژه‌های کلیدی:** سیستم‌های غیرخطی، دنباله توابع لیاپانوف، پایداری مجانبی، بهبود ناحیه جذب.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۴/۱۰

تاریخ پذیرش مشروط مقاله: ۱۳۹۷/۰۹/۲۴

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۱۰/۲۵

نام نویسنده‌ی مسئول: دکتر ابوالحسن رزمی‌نیا

نشانی نویسنده‌ی مسئول: ایران - بوشهر - خیابان شهید ماهینی - دانشگاه خلیج فارس - دانشکده مهندسی - گروه مهندسی برق - آزمایشگاه سیستم‌های دینامیکی و کنترل

[۱۷] را به نحوی اصلاح و تعمیم نماییم که از آن طریق، ناحیه جذب بزرگتری حاصل گردد. ایده اصلی این نوشتار، تولید دنباله‌ای از توابع کاندید لیاپانوف، بر پایه یک تابع لیاپانوف اولیه است که در هر گام رو به جلو، ناحیه جذب بزرگ‌تر را نتیجه می‌دهد.

ساختار مقاله به قرار زیر است: پس از مقدمه‌ای کوتاه، در بخش ۲ پیش‌نیازهای ضروری مرتبط با این نوشتار مرور می‌گردد. نتایج نظری اصلی مقاله در بخش ۳ ارائه شده است. قوت روش ارائه شده در قالب مثال‌های شبیه‌سازی شده در بخش ۴ به نمایش گذاشته شده است. نهایتاً، جمع‌بندی رؤس مطالب ارائه شده به همراه پیشنهادهایی برای کارهای آینده پژوهشی در بخش ۵، پایان‌بخش این مقاله خواهد بود.

## ۲- پیش‌نیازها

روش پایداری لیاپانوف معیار تحلیل پایداری قابل اجرا در سیستم‌های دینامیکی غیرخطی است. این روش برای تجزیه و تحلیل پایداری حالت تعادل یک سیستم دینامیکی نیازمند به یک تابع لیاپانوف  $v(x)$  است که اولاً  $v(x)$  یک تابع مثبت معین باشد و ثانیاً مشتق مرتبه اول آن در راستای پاسخ سیستم یک تابع منفی معین باشد. اگر مشتق مرتبه اول تابع کاندیدای لیاپانوف منفی معین نباشد می‌توان از ترکیب خطی مشتقات مراتب بالاتر تابع لیاپانوف استفاده کرد تا نقش منفی معین نبودن مشتق مرتبه اول تابع لیاپانوف در تحلیل پایداری جبران گردد [۱۷].

برای سیستم دینامیکی  $\dot{x} = f(x)$  فرض کنید  $\phi(x_0, t)$  نشان‌دهنده مسیر حالت  $x(t)$  آغاز شده از  $x(t_0) = x_0$  به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\begin{cases} x(t) = \phi(x_0, t) \\ \phi(x_0, 0) = x_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \phi(x_0, t) = f(\phi(x_0, t)) \end{cases} \quad (1)$$

در این صورت ناحیه جذب برای این نقطه تعادل به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Omega = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(x_0, t) = 0\} \quad (2)$$

برای یک تابع لیاپانوف معین مانند  $v(x) > 0$  یک مجموعه مانند  $W$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{v}(x) < 0\} \quad (3)$$

یک تخمین اولیه از ناحیه جذب در قالب زیرمجموعه‌ای از  $W$  تحت عنوان  $R$  با تعریف زیر قابل حصول می‌باشد:

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid v(x) \leq C\} \quad (4)$$

به عنوان نمونه، مسیر ۱ در شکل ۱، با شروع از  $W$  آن را ترک می‌کند در حالی که مسیر ۲ با شروع از  $R$  همواره در  $R$  باقی مانده نهایتاً به مبدأ همگرا می‌شود. با این رهیافت، بزرگ‌ترین  $C$  بزرگ‌ترین ناحیه جذب را به دست می‌دهد. این توصیف‌ها در شکل ۱ قابل

پایداری لیاپانوف یک ابزار استاندارد در تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیکی غیرخطی است. چنان‌که می‌دانیم در تحلیل پایداری نقطه تعادل یک سیستم غیرخطی با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف، باید یک تابع  $v(x)$ ، موسوم به تابع لیاپانوف، چنان تعیین گردد که خود تابع  $v(x)$  مثبت معین و مشتق آن، منفی نیمه معین باشد [۱۷]. از ایده لیاپانوف در تحلیل و طراحی انواع سیستم‌های کنترل غیرخطی استفاده می‌شود. یکی از موضوعات مهم در حوزه تحلیل سیستم‌های غیرخطی، تخمین ناحیه جذب<sup>۱</sup> یا ROA است. در واقع ناحیه جذب محدوده‌ای از فضای حالت است که مسیرهای حالت شروع‌کننده از آن، در نهایت به سمت نقطه تعادل سیستم می‌گریند. معمولاً در بسیاری از سیستم‌ها این ناحیه ساده نبوده و شکل پیچیده‌ای دارد.

در سال‌های اخیر، تخمین ناحیه جذب در بسیاری از زمینه‌ها مانند پزشکی [۳ و ۴]، اقتصاد [۵]، ترافیک [۶]، سیستم‌های زیستی [۷] و فرایندهای شیمیایی [۸] کاربرد یافته است. یکی از روش‌های کلاسیک در تخمین ناحیه جذب، استفاده از روش مستقیم لیاپانوف می‌باشد. اما از آنجا که قضیه لیاپانوف، شرطی کافی برای پایداری نقطه تعادل، به دست می‌دهد، پس بسته به انتخاب تابع کاندید لیاپانوف، ناحیه جذب تخمینی، می‌تواند بزرگ یا کوچک باشد. لذا توسعه روشی به منظور دست‌یابی به یک بخش بزرگ از ناحیه جذب، مورد توجه محققین این حوزه بوده است [۹ - ۱۳]. در ادامه چند نمونه از شیوه‌های متداول مرور می‌شود.

در [۱۴] یک روش جدید بر اساس نابرابری‌های خطی ماتریسی، ایده‌ای برای تخمین ناحیه جذب سیستم‌های با ابعاد بزرگ ارائه شده است. مزیت اصلی این روش، توانایی آن در کاهش تعداد متغیرهای بهینه‌سازی است که بدون تحمیل محدودیت‌های ساختاری بر تابع لیاپانوف، قوانین کنترل غیرمتمرکز تولید می‌کند که به تبع آن، ناحیه جذب را با دقت بهتری تخمین می‌زند. یک تکنیک قابل اجرا برای ساخت توابع لیاپانوف به صورت مجموع مربعات<sup>۲</sup> یا SOS از جملات چندجمله‌ای است. در [۱۵] با استفاده از روش عددی برنامه‌ریزی مجموع مربعات، ناحیه جذب برای سیستم‌های غیرخطی چندجمله‌ای تخمین زده می‌شود. یک روش دیگر در [۱۶] ارائه شده است که با فرموله کردن مسأله در قالب یک مسأله بهینه‌سازی با در نظر گرفتن یک سری قیود جهت جلوگیری از پاسخ‌های اضافی، مطابق یک شاخص تعریف شده، بهترین ناحیه جذب براساس تابع لیاپانوف را تخمین می‌زند.

در حالت کلی، بر اساس فرم تابع لیاپانوف انتخابی در اثبات پایداری نقطه تعادل یک سیستم، معمولاً فقط بخش کوچکی از ناحیه جذب قابل محاسبه است. رهیافت ارائه شده در [۱۷] که در واقع با استفاده از مشتقات مراتب بالاتر تابع لیاپانوف، یک تابع لیاپانوف جدید، ارائه می‌کند، می‌تواند نقطه شروعی برای تخمین ناحیه جذب بزرگ‌تر در نظر گرفته شود. در واقع در این مقاله بنا داریم که روش پیشنهادی

بدین ترتیب با توجه به تعریف تابع  $u$ ، ناحیه زیر در همه زمان ها بخشی از ناحیه جذب می‌باشد:

$$R_u(t) = \{x : u(x, t) \leq C\} \quad (9)$$

دلیل این نکته واضح است زیرا همه نقاطی که مقدار تخصیصی به آنها کمتری مساوی  $C$  است نهایتاً به  $R$  می‌گریند که این هم بنابراین تعریف، به صورت مجانبی به سمت نقطه تعادل سوق پیدا می‌کند. تابع  $u(x, t)$  به گونه‌ای تعیین شده است که:

$$u(\phi(x_0, t), t) = v(x_0) \quad (10)$$

از طرفی با توجه به تعریف  $x = \phi(x_0, t)$  می‌توان نوشت: بنابراین:

$$u(x, t) = v(\phi(x, -t)), \quad \forall x, t \quad (11)$$

پس بدین ترتیب با محاسبه تابع  $u$ ، می‌توان ناحیه جذب بزرگ‌تر را تعیین نمود. یکی از ویژگی‌های مهم این تابع، در قالب قضیه زیر بیان شده است.

**قضیه ۱:** فرض کنید ناحیه جذب متناظر با تابع لیاپانوف  $v(x)$  به صورت  $R_v$  نشان دهیم. آنگاه برای هر  $t_1$  ثابت، ناحیه  $R_u(t_1)$  با فرض کران دار بودن، بخشی از ناحیه جذب است. به عبارت دیگر، زوج تابع لیاپانوف - ناحیه جذب به صورت زیر خواهد بود:

$$v \leftrightarrow R_v = \{x : v(x) < C\} \quad (12)$$

$$u \leftrightarrow R_u(t_1) = \{x : u(x, t_1) < C\}$$

**اثبات:** فرض کنید  $x_0 \in R$  باشد، آنگاه مطابق تعریف تابع  $u$  داریم:  $u(x, t) = v(x_0) \leq C$  که با فرض ثابت بودن  $x_0$  می‌توان از طرفین این عبارت به صورت زیر نسبت به  $t$  مشتق گرفت:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right]^T f(x) + \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = 0 \quad (13)$$

با استفاده از رابطه (۱۱) و قاعده مشتق زنجیره‌ای، جمله دوم عبارت فوق به صورت زیر قابل نوشتن است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} v(\phi(x, -t)) \\ &= [\nabla v(\phi(x, -t))]^T \frac{\partial}{\partial(-t)} \phi(x, -t) \frac{\partial(-t)}{\partial t} \\ &= [\nabla v(\phi(x, -t))]^T f[\phi(x, -t)] \times (-1) \\ &= -[\nabla v(x_0)]^T f(x_0) \end{aligned} \quad (14)$$

با جایگذاری رابطه (۱۴) در رابطه (۱۳) خواهیم داشت:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right]^T f(x) = [\nabla v(x_0)]^T f(x_0) \quad (15)$$

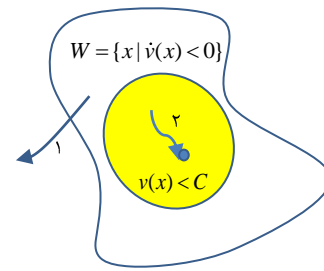
با توجه به اینکه  $v$  تابع لیاپانوف است، سمت راست عبارت فوق، منفی می‌باشد که بدین ترتیب می‌توان گفت روی مجموعه  $u(x, t_1) \leq C$  رابطه زیر برقرار است:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t_1) \right]^T f(x) < 0 \quad (16)$$

رویت می‌باشد. بنابر تعریف تابع لیاپانوف و مجموعه  $W$ ، بزرگ‌ترین مقدار  $C$  به صورت زیر خواهد بود:

$$C \triangleq \inf_{x \in W} \{v(x)\} \quad (5)$$

با این حال، هیچ روش سیستماتیکی برای ساخت توابع لیاپانوف با هدف دسترسی به تخمین کل ناحیه جذب وجود ندارد.



شکل (۱): ناحیه جذب اولیه در روش لیاپانوف.

### ۳- نتایج نظری

یک سیستم دینامیکی خودگردان مانند  $\dot{x} = f(x)$  مفروض است که  $f(\cdot) \in C^\infty$  و نقطه تعادل آن، مبدأ می‌باشد. با فرض پایداری مجانبی این نقطه تعادل، تابع لیاپانوفی به شکل  $v(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  برای آن در نظر می‌گیریم که  $v(x) \in C^\infty$  و  $x \in \mathbb{R}^n$  پاسخی از سیستم داده شده است. فرض کنید نقطه آغاز در لحظه  $t_0 = 0$  در مختصات  $x_0$  قرار داشته باشد و مقدار تابع لیاپانوف در این نقطه برابر  $v(x_0)$  باشد. متناظر با همه نقاط روی مسیر تولید شده توسط  $x_0$  تحت دینامیک سیستم در فضای حالت، در هر زمان معین، مقدار عددی  $v(x_0)$  تخصیص داده می‌شود که این مقدار تخصیصی به هر نقطه در هر زمان توسط تابع  $u(x, t)$  به صورت زیر نمایانده می‌شود:

$$u(x(t), t) = v(x_0) \quad (6)$$

که در آن  $u(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . فرض کنید  $R$  تعریف شده در رابطه (۴) بخشی از ناحیه جذب باشد. روشن است اگر یک  $t^*$  وجود داشته باشد که به ازای آن  $x(t^*) \in R$  در این صورت مجموعه زیر نیز جزء ناحیه جذب می‌باشد:

$$M = \{x_0 : \phi(x_0, t^*) \in R\} \quad (7)$$

حال ناحیه جذب نشان داده شده در شکل (۱) با نماد  $R$  را در نظر بگیرید که به صورت زیر بازنگاری می‌گردد:

$$\begin{cases} v(x_0) \leq C \\ [\nabla v(x_0)]^T f(x_0) < 0 \end{cases} \quad (8)$$

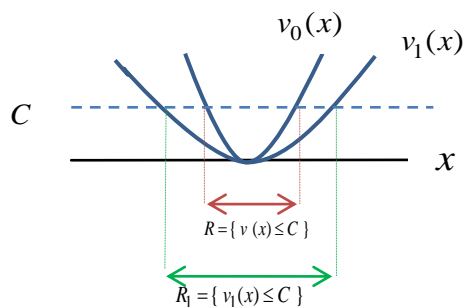
به عبارت دیگر، در روش عددی تولید دنباله توابع کاندید لیاپانوف، تابع لیاپانوف جدید به صورت ترکیب خطی تابع مرحله قبل با مشتق آن به دست می‌آید. یکی از مزایای این نمادگذاری این است که می‌توان به صورت مستقیم نشان داد طی این دنباله، مجموعه‌های ساخته شده در هر مرحله، بزرگ‌تر می‌شود. به طور مشخص با فرض در اختیار داشتن ناحیه اولیه به صورت  $v_0(x) \leq C$ ، می‌خواهیم نشان دهیم ناحیه  $v_1(x) \leq C$  از ناحیه اولیه بزرگ‌تر است. با استفاده از رابطه (۲۳) و هم‌چنین با توجه به لیاپانوف بودن همه اعضای دنباله، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= v_0(x) + \varepsilon \dot{v}_0(x) > 0 \\ \dot{v}_1(x) &= \dot{v}_0(x) + \varepsilon \ddot{v}_0(x) < 0 \end{aligned} \quad (24)$$

با توجه به روش تخمین ناحیه جذب که در قسمت‌های پیشین گفته شد، ملاحظه می‌شود که تخمین جدید ناحیه جذب بر اساس اعضای جدید دنباله، نیز باید دارای نمایش مشابهی باشد؛ به عبارت دیگر برای  $v_1(x)$  داریم:

$$R_1 = \{x | v_1(x) \leq C\} \quad (25)$$

در واقع مجموعه سطحی<sup>۴</sup> تعریف شده توسط پارامتر  $C$  در هر گام دنباله، بزرگ‌تر می‌شود که به معنای بزرگ‌تر شدن ناحیه جذب می‌باشد؛ به عبارت دیگر  $R \subset R_1$ . دلیل این نکته با توجه به معادله اول از رابطه (۲۴) را می‌توان بدین صورت توضیح داد: تابع  $v_0$  یک تابع لیاپانوف است که خود مثبت و مشتق آن منفی است. لذا با توجه به مثبت بودن  $\varepsilon$  نتیجه می‌شود  $v_1 < v_0$ . چنان‌که از روی شکل (۲) نیز دیده می‌شود، مجموعه سطحی متناظر با  $v_1$  بزرگ‌تر از مجموعه متناظر با  $v_0$  است.



شکل (۲): بزرگ‌تر شدن ناحیه  $R_1$

کاری که در [۱۷] انجام شده اساساً پیشنهاد یک تابع لیاپانوف برای اثبات پایداری نقطه تعادل سیستم است که تنها بر فرض مثبت معین بودن خود تابع انتخابی اولیه، بدون نیاز به منفی معین بودن مشتق آن، متکی می‌باشد. سپس با ترکیب خطی آن تابع مثبت و مشتقات مراتب بالاتر، تابع کاندید لیاپانوف تشکیل می‌شود که هیچ

رابطه بدست آمده به این معنی است که برای یک زمان ثابت  $t_1$  در ناحیه جذب معرفی شده با  $u(x, t_1) \leq C$  مشتق تابع کاندیدی لیاپانوف  $u(x, t_1)$  نسبت به زمان  $t$ ، منفی است. ضمناً بنا بر تعریف تابع  $u$ ، مثبت معین بودن آن نیز روشن است:

$$\begin{cases} u(0, t_1) = 0 \\ \forall x \neq 0 \quad u(x, t_1) > 0 \end{cases} \quad (17)$$

بدین ترتیب می‌توان اعلام کرد تابع  $u(x, t_1)$  یک کاندیدی لیاپانوف است که بسته به مسأله هرگاه شرط بی‌کرانی شعاعی نیز برقرار باشد، در این صورت تابع مزبور قطعاً یک تابع لیاپانوف می‌باشد که به ازای  $t_1 < 0$  بخش بزرگ‌تری از ناحیه جذب را تخمین می‌زند که اثبات را کامل می‌کند. □

با استفاده از قضیه فوق، چنین استنتاج می‌شود که محاسبه تابع  $u(x, t)$  برای زمان‌های منفی، مستقیماً به تخمین بخش بزرگ‌تری از ناحیه جذب می‌انجامد. اما در حالت کلی، ارائه یک روش تحلیلی برای محاسبه  $u(x, t)$  امکان‌پذیر نیست. لذا بدین منظور، در ادامه یک روش عددی پیشنهاد می‌گردد.

برای تابع دومتغیره  $u(x, t)$  بنا بر تعریف مشتق، می‌توان تقریب زیر را نوشت:

$$u(x, t + \Delta t) \approx u(x, t) + (\Delta t) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \quad (18)$$

با استفاده از رابطه (۱۳)، عبارت فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$u(x, t + \Delta t) \approx u(x, t) - (\Delta t) \left[ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right]^T f(x) \quad (19)$$

از آنجا که هدف ما محاسبه مقدار تابع  $u(x, t)$  برای زمان‌های منفی است، پس به ازای یک  $\varepsilon > 0$ ، نمادهای زیر را انتخاب می‌نماییم:

$$\begin{cases} \Delta t = -\varepsilon \\ t = -k\varepsilon \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (20)$$

با جایگذاری رابطه (۲۰) در (۱۹) داریم:

$$u(x, -(k+1)\varepsilon) \approx \quad (21)$$

$$u(x, -k\varepsilon) + \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial x} u(x, -k\varepsilon) \right]^T f(x)$$

به ازای یک  $x$  ثابت بنا بر تعریف تابع  $u$ ، مقدار اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x, 0) = v(x) \quad (22)$$

حال با اجرای این الگوریتم ساده می‌توان دنباله‌ای از توابع کاندید لیاپانوف  $u(x, -k\varepsilon)$  برای  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  را بدست آورد و هر تابع کاندید لیاپانوف ناحیه جذب بزرگ‌تری نسبت به قبلی به صورت رابطه  $u(x, -k\varepsilon) \leq C$  به دست خواهد داد. حال با تعریف  $u(x, -k\varepsilon) = v_k(x)$  می‌توان رابطه (۲۱) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$v_{k+1}(x) = v_k(x) + \varepsilon \dot{v}_k(x) \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(x) = & 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1x_2 - 1) \\ & + \varepsilon[4(x_1^2 + x_2^2)(x_1x_2 - 1)^2 \\ & + 2(x_1^2 + x_2^2)(-2x_1x_2 + x_1^4 + x_2^4)] \end{aligned} \quad (33)$$

نکته مهم در این مثال، قابلیت استفاده از یک ثابت  $C$  برای همه نواحی جذب  $v_k(x) < C$  است که اینک برای  $v_1(x)$  نشان می‌دهیم. به سادگی دیده می‌شود مرز ناحیه جذب سیستم (۲۶) بر روی نقطه  $(1,1)$  قرار دارد که یکی از نقاط تعادل سیستم مذکور نیز می‌باشد. مقدار تابع  $v_1(x)$  در این نقطه تعادل به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} v_1(1,1) = & v_0(1,1) + \varepsilon \dot{v}_0(1,1)^0 \\ = & v_0(1,1) = 2 \end{aligned} \quad (34)$$

پس ناحیه جذب تخمینی توسط  $v_1(x)$  به صورت زیر خواهد بود:

$$R_1 = \{x \mid v_1(x) < 2\} \quad (35)$$

به سادگی می‌توان نشان داد این تخمین جدید از ناحیه جذب، نسبت به تخمین اولیه  $R$  بزرگ‌تر است. برای اثبات این موضوع، فرض کنید  $x^* \in R$  باشد. بنابر تعریف  $R$  می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} v_0(x^*) < 2 \\ \dot{v}_0(x^*) < 0 \end{cases} \quad (36)$$

که نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$v_1(x^*) = v_0(x^*) + \varepsilon \dot{v}_0(x^*) < 2 \quad (37)$$

که این یعنی  $x^* \in R_1$ . از طرف دیگر هرگاه  $\tilde{x} \notin W$  آنگاه:

$$\begin{cases} v_0(\tilde{x}) \geq 2 \\ \dot{v}_0(\tilde{x}) \geq 0 \end{cases} \quad (38)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$v_1(\tilde{x}) = v_0(\tilde{x}) + \varepsilon \dot{v}_0(\tilde{x}) \geq 2 \quad (39)$$

و این هم یعنی  $\tilde{x} \notin R_1$ . بنابراین  $R \subset R_1 \subset W$ . نتیجه شبیه‌سازی این سیستم برای  $\varepsilon = 0.05$  در شکل ۳ آورده شده است. چنان‌که ملاحظه می‌شود در هر گام تکرار الگوریتم تولید توابع کاندیدهای لیپانوف، ناحیه جذب بزرگ‌تری تخمین زده می‌شود. شایان ذکر است همه این نواحی توسط مجموعه سطحی  $v_k(x) < C$  تعریف می‌گردد.

اظهار نظری درباره تخمین ناحیه جذب نمی‌کند. اما در این نوشتار، ما با فرض در اختیار داشتن یک تابع لیپانوف اولیه، به روش تکرارهای متوالی مطابق رابطه (۲۳)، دنباله‌ای از توابع کاندید لیپانوف را می‌سازیم که از طریق آن، بخش‌های بزرگ‌تری از ناحیه جذب، تخمین زده می‌شود. هم‌چنین تنها با فرض  $\varepsilon$  کوچک و با کمک رابطه (۲۳)، توابع کاندید به منظور تخمین ناحیه جذب بزرگ‌تر ساخته می‌شوند.

#### ۴- مثال‌ها و شبیه‌سازی‌ها

در این بخش با ارائه چند مثال، به تشریح نتایج نظری پیش‌گفته می‌پردازیم.

مثال ۱: سیستم غیرخطی توصیف‌شده با رابطه زیر مفروض است:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 - x_2 \end{cases} \quad (26)$$

نقاط تعادل این سیستم عبارتند از:

$$E = \{(0,0), (1,1), (-1,-1)\} \quad (27)$$

با انتخاب تابع لیپانوف  $v_0(x) = x_1^2 + x_2^2$ ، به سادگی پایداری محلی نقطه تعادل  $(0,0)$  نتیجه می‌شود. مشتق این تابع به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{v}_0(x) = & 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ = & 2x_1(-x_1 + x_2^3) + 2x_2(x_1^3 - x_2) \\ = & 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1x_2 - 1) \end{aligned} \quad (28)$$

بنابراین ناحیه‌ای که در آن  $\dot{v}_0(x)$  منفی است عبارتست از:

$$\begin{aligned} W = & \{x \mid \dot{v}_0(x) < 0\} \cup \{0\} \\ = & \{x \mid (x_1x_2 - 1) < 0\} \end{aligned} \quad (29)$$

توجه نمایید برای  $\forall x \notin W$  رابطه زیر برقرار است.

$$v_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2 \geq 2 \quad (30)$$

لذا با محاسبه  $C$  به صورت  $\inf_{x \notin W} v_0(x)$  مرز ناحیه جذب متناظر به شکل زیر تعیین می‌شود:

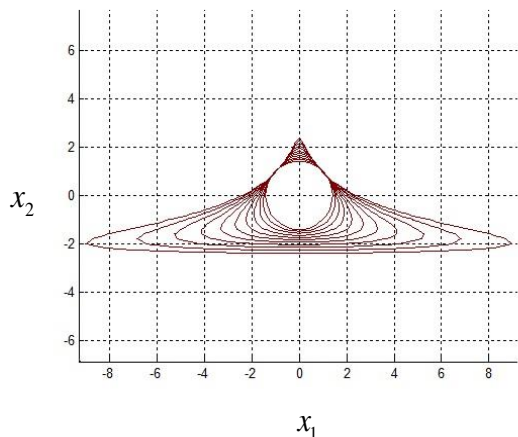
$$R = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 2\} \quad (31)$$

که در آن  $C = 2$ . حال با استفاده از روش تولید دنباله توابع کاندید لیپانوف به صورت تکرارشونده و در نظر گرفتن یک  $\varepsilon$  کوچک دلخواه می‌توان نوشت:

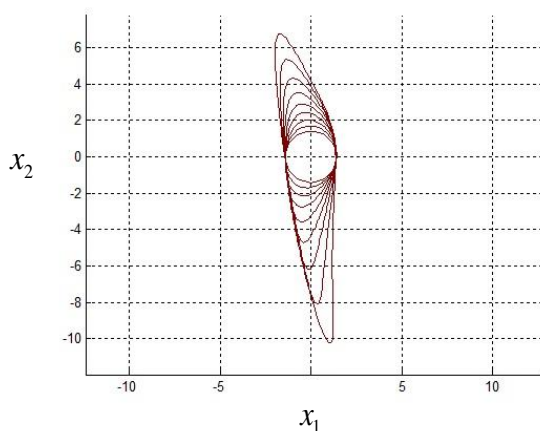
$$\begin{aligned} v_1(x) = & v_0(x) + \varepsilon \dot{v}_0(x) \\ = & (x_1^2 + x_2^2) + 2\varepsilon(x_1^2 + x_2^2)(x_1x_2 - 1) > 0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\dot{v}_1(x) = \dot{v}_0(x) + \varepsilon \dot{v}_0(x) < 0$$

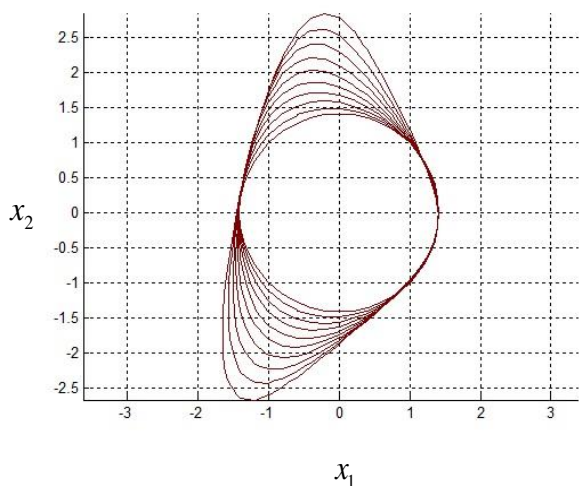
با محاسبه  $\dot{v}_0(x)$  و  $\dot{v}_1(x)$  خواهیم داشت:



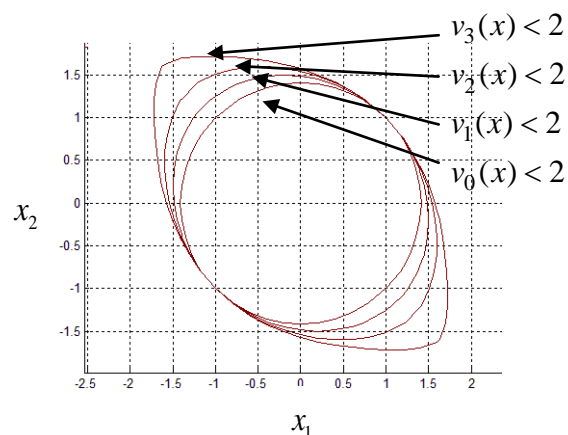
شکل (۴): نواحی جذب تخمین زده شده مربوط به سیستم  $S_1$



شکل (۵): نواحی جذب تخمین زده شده مربوط به سیستم  $S_2$



شکل (۶): نواحی جذب تخمین زده شده مربوط به سیستم  $S_3$



شکل (۳): نواحی جذب تخمین زده شده برای مثال ۱ با  $\varepsilon = 0.05$

مثال ۲: سیستم‌های زیر مفروضند:

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \quad (۴۰)$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + x_1x_2 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_1x_2 \end{cases}$$

روشن است مبدأ مختصات فضای حالت، نقطه تعادل هر سه سیستم می‌باشد. علاوه بر این با محاسبه‌ای ساده می‌توان با انتخاب تابع لیاپانوف  $v_0(x) = x_1^2 + x_2^2$  نشان داد، نقطه تعادل برای هر سه سیستم، پایدار مجانبی است. بدین ترتیب با اجرای الگوریتم تکرارشونده (۲۳) به ازای  $\varepsilon = 0.05$ ، می‌توان دنباله‌ای از توابع کاندید لیاپانوف برای هر سیستم تولید کرد که متناظر با هر عضو دنباله، تخمینی از ناحیه جذب به دست می‌آید. در اینجا نیز با هر گام رو به جلو، ناحیه جذب بزرگ‌تری حاصل می‌شود. نتایج شبیه‌سازی برای هر سه سیستم، به ترتیب در شکل‌های ۴، ۵ و ۶ آورده شده است. بزرگ شدن نواحی جذب تخمینی از روی شکل، کاملاً محرز می‌باشد.



## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله، بر اساس انتخاب یک تابع لیاپانوف اولیه، با استفاده از یک روش تکرار شونده، دنباله‌ای از توابع کاندید لیاپانوف تولید شد که در هر گام رو به جلو، هر یک از توابع جدید تولید شده، بخش بزرگ تری از ناحیه جذب را به دست می‌دهند. نکته مهم تولید دنباله کاندیدهای لیاپانوف بر اساس ترکیب خطی تابع مرحله قبل با مشتق آن تبیین گردید که در مقایسه با کارهای مشابه، یک نوآوری محسوب می‌شود. ایده اصلی تخمین ناحیه جذب به کمک روش مزبور، در تعریف یک تابع دو متغیره نهفته است که مقدار عددی ثابتی را در گذر زمان برای هر مسیر حالت حفظ می‌کند. بدین ترتیب، با معکوس گیری زمانی، به مجموعه‌های بزرگ تری در تخمین ناحیه جذب دست یافتیم. هم چنین گفتنی است همه نواحی جذب تخمین زده شده به وسیله روش ارائه شده در این مقاله، توسط یک مقدار ثابت  $C$  تعریف شدند که منجر به معرفی مجموعه‌های سطحی متناظر با هر تابع کاندید لیاپانوف جدید گردید.

## مراجع

- [1] J.J.E. Slotine, W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, 1991.
- [2] H.K. Khalil, Nonlinear Control, Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 2015.
- [3] A. Merola, C. Cosentino and F. Amato, "An Insight of Tumor Dormancy Equilibrium via the Analysis of its Domain of Attraction", Biomedical Signal Processing, Vol. 3, pp: 212-219, 2008.
- [4] C. C. Monica, M. Pitchaimani, "Analysis of Stability and Hopf Bifurcation for HIV-1 Dynamics with PI and Three Intracellular Delays", Nonlinear Analysis: Real World Applications, Vol. 27, pp: 55-69, 2016.
- [5] T. Russell, A. Zecevic, "Indeterminate Growth Paths and Stability", Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 24, pp: 39-62, 2000.
- [6] J. Haddad, N. Geroliminis, J. Haddad and É. Polytechnique, "Stability analysis of traffic control in two-region urban cities", Swiss Transportation Research Conference (STRC), pp:1-29, 2011.
- [7] M.L. Matthews, C.M. Williams, "Region of Attraction Estimation of Biological Continuous Boolean Model", Proceedings of the IEEE conference on systems, man, and cybernetics, pp: 1700-1705, 2012.
- [8] M. Barkhordari Yazdi, M.R. Jahed-Motlagh, S.A. Attia and J. Raisch, "Modal Exact Linearization of a Class of Second-Order Switched Nonlinear Systems", Nonlinear Analysis-Real World Applications, Vol. 11, pp: 2243-2252, 2010.
- [9] G. Valmorbida, J. Anderson, "Region of Attraction Estimation using Invariant Sets and Rational Lyapunov Functions", Automatica, Vol. 75, pp: 37-45, 2017.
- [10] D. H. Lee, J. B. Park, Y. H. Joo, "A Fuzzy Lyapunov Function Approach to Estimating the Domain of Attraction for Continuous-Time Takagi-Sugeno Fuzzy Systems", Information Sciences, Vol. 185, pp: 230-248, 2012.
- [11] G. Chesi, "Estimating the Domain of Attraction via Union of Continuous Families of Lyapunov Estimates", Systems & Control Letters, Vol. 56, pp: 326-333, 2007.

- [12] P. Giesl, "Approximation of Domains of Attraction and Lyapunov Functions using Radial Basis Functions", IFAC Proceedings Volumes, Vol. 37, pp: 697-702, 2004.
- [13] D. Melchor-Aguilar, S-I. Niculescu, "On Computing Estimates of the Attraction Region for a Class of Nonlinear Time-Delay Systems", IFAC Proceedings Volumes, Vol. 39, pp: 626-631, 2006.
- [14] A.I. Zečević, D.D. Šiljak, "Estimating the Region of Attraction for Large-Scale Systems with Uncertainties", Automatica, Vol. 46, pp: 445-451, 2010.
- [15] L. Khodadadi, B. Samadi, H. Khaloozadeh, "Estimation of Region of Attraction for Polynomial Nonlinear Systems: A Numerical Method", ISA Transactions, Vol. 53, pp: 25-32, 2014.
- [16] L. G. Matallana, A.M. Blanco, J. A. Bandoni, "A Global Optimization Approach for the Estimation of Domains of Attraction", 10th International Symposium on Process Systems Engineering, pp: 1281-1286, 2009.
- [17] V. Meigoli, S.K.Y. Nikravesh, "Stability Analysis of Nonlinear Systems using Higher Order Derivatives of Lyapunov Function Candidates", Systems & Control, Letters, Vol. 61, pp: 973-979, 2012.
- [18] Object Management Group. Unified Modeling Language: Superstructure, Version 2.0, ptc/03-07-06, July 2003, <http://www.omg.org/cgi-bin/doc?ptc/2003-08-02>.

## زیر نویس ها

<sup>1</sup> Region of attraction

<sup>2</sup> Sum of squares

<sup>4</sup> Level set

<sup>۳</sup> این نکته پیش از این در قضیه ۱ تبیین شد.