

مدیریت انرژی بهینه اجتماعی با حضور ذخیره‌سازها در شبکه هوشمند

آذین شجاعی برجوئی^۱ مهدی معلم^۲ محمدحسین منشئی^۳

۱- دانشجوی دکتری- دانشگاه صنعتی اصفهان- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- اصفهان- ایران

azin.shojaei@ec.iut.ac.ir

۲- استاد- دانشگاه صنعتی اصفهان- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- اصفهان- ایران

moallem@cc.iut.ac.ir

۳- دانشیار- دانشگاه صنعتی اصفهان- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر- اصفهان- ایران

manshaei@cc.iut.ac.ir

چکیده: در این مقاله، یک مکانیزم مدیریت انرژی روزپیش در چارچوب تئوری بازی در یک شبکه هوشمند طراحی شده که در آن شرکت توزیع و مشترکین مسکونی نقش دارند. تعامل هوشمند مشترکین و شرکت توزیع در چارچوب بازی «استکلبرگ» یک رهبر-چندپیرو معرفی و مدل می‌شود. رهبر بازی شرکت توزیع بوده که با ماکزیمم کردن سود خود با بکارگیری بهینه‌سازی تصادفی ارزش در معرض ریسک شرطی، قیمت انرژی را محاسبه و به مشترکین ارسال می‌کند. مشترکین هوشمند که پیروان بازی استکلبرگ هستند، با در نظر گرفتن قید مشترک تنظیم ماکزیمم دیماند شبکه در مسئله بهینه‌سازی خویش، در یک «بازی عام نش» با دیگر مشترکین شرکت می‌کنند. در این مقاله، اثبات می‌شود که بازی عام نش مشترکین «قویا یکنوا» بوده و دارای یک نقطه تعادل «یکتا» است؛ بر همین اساس، الگوریتم مدیریت انرژی مبتنی بر بهترین پاسخ، برای رسیدن به نقطه تعادل استکلبرگ طراحی و شرایط همگرایی آن اثبات می‌شود. همچنین، در این مقاله اثبات می‌شود که نقطه تعادل استکلبرگ مکانیزم مدیریت انرژی پیشنهادی، یک نقطه تعادل «بهینه اجتماعی» است که در آن مجموع هزینه مشترکین مینیمم و سود شرکت توزیع ماکزیمم می‌شود. با بکارگیری مکانیزم مدیریت انرژی پیشنهادی، در شبکه نمونه ماکزیمم دیماند شبکه ۲۱,۸۹٪ کاهش و ضریب بار ۲۷,۷۲٪ افزایش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: شبکه هوشمند، مدیریت انرژی، ضریب بار، بازی استکلبرگ، بازی عام نش، الگوریتم بهترین پاسخ

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۱۰/۱۴

تاریخ پذیرش مشروط مقاله: ۱۳۹۷/۰۲/۲۹

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۱۱/۳۰

نام نویسنده‌ی مسئول: دکتر مهدی معلم

نشانی نویسنده‌ی مسئول: ایران، اصفهان ۸۳۱۱۱-۸۴۱۵۶، دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

۱- مقدمه

مدیریت مصرف، بهبود میزان و نحوه مصرف انرژی در سمت مصرف می‌باشد [۱]. برنامه‌های مدیریت مصرف شامل برنامه‌های افزایش بازده انرژی [۲]، قیمت‌گذاری هوشمند [۳]، برنامه‌های پاسخگویی بار [۴]، [۵] و به ویژه بکارگیری بهینه منابع تولید پراکنده [۳، ۶] و ذخیره‌کننده‌های انرژی [۶، ۸] می‌باشد. در عمل مدیریت مصرف با استفاده بهینه از منابع و شبکه موجود، سرمایه‌گذاری‌های جدید برای احداث نیروگاه یا شبکه جدید را به تعویق می‌اندازد. افزایش تقاضای انرژی الکتریکی، محدود بودن منابع سوخت فسیلی، افزایش حجم گازهای گلخانه‌ای، پیدایش بارهای الکتریکی جدید با طبیعت تصادفی همچون خودروهای برقی، افزایش نفوذ منابع تجدیدپذیر با تولید متغیر و تصادفی و از همه مهم‌تر، تغییر شبکه‌های مرسوم توزیع به شبکه هوشمند، منجر به بازنگری و اصلاح برنامه‌های مدیریت مصرف شده است.

با توجه به زیرساخت‌های اندازه‌گیری پیشرفته (AMIs) و تکنولوژی مخابراتی و اطلاعاتی موجود در شبکه هوشمند، امکان بررسی شرایط شبکه توزیع و ارسال قیمت زمان‌واقعی انرژی برای مشترکین فراهم می‌شود. مشترکین هوشمند با بهره‌گیری از سیستم‌های مدیریت انرژی و الگوریتم‌های محاسباتی، مصرف خویش را زمان‌بندی نموده و به این ترتیب مدیریت مصرف اتوماتیک توزیع شده در نسل جدید شبکه‌های توزیع امکان‌پذیر می‌شود. در [۹]، زمان‌بندی بهینه مصرف بارهای پاسخگو مشترکین یک شبکه هوشمند بر اساس انرژی موردنیاز روزانه آنها در چارچوب بازی غیرهمکارانه، مدل و تعیین می‌شود. در این روش پیشنهادی، هزینه انرژی کل سیستم مینیمم خواهد شد؛ این در حالی است که صورت‌حساب مشترکینی که دارای مصرف انرژی روزانه مشابه هستند، بدون توجه به زمان مصرف آنها (اوج مصرف یا کم‌باری)؛ یکسان است. برای رفع این مشکل، در مقالات [۶، ۱۰، ۱۱]، صورت‌حساب برق هر مشترک بر اساس میزان مصرفش در هر بازه زمانی تنظیم می‌شود. در تحقیقات مذکور، مشترکین به عنوان یک عامل هوشمند پیش‌بین قیمت در بازی مدیریت مصرف شرکت کرده و از نحوه تاثیرگذاری خویش بر قیمت انرژی آگاه هستند. در دسته دیگری از مقالات، شرکت برق به عنوان یک بازیگر در بازی مدیریت مصرف شرکت نموده و استراتژی خود که قیمت انرژی است؛ به مشترکین قیمت‌پذیر اعلام می‌کند. در [۱۲]، استراتژی قیمت بهینه توسط شرکت برق تعیین و به مشترکین ارسال می‌شود؛ مشترکین با توجه به سیگنال قیمت، مصرف بارهای پاسخگوی خویش را زمان‌بندی می‌کنند. در [۴]، مدیریت مصرف بارهای پاسخگو مشترکین در حضور چند شرکت برق با استفاده از بازی استکلبرگ چندرهبر- چندپرو مدل می‌شود. در مکانیسم‌های مدیریت انرژی مذکور، عامل‌های هوشمند با اجرای یک پروسه تکرارشونده به نقطه تعادل بازی همگرا

خواهند شد. نقطه قوت این الگوریتم‌ها، طبیعت توزیع شده آنها است که تصمیم‌گیری تنها بر اساس اطلاعات محلی هر عامل صورت پذیرفته و از پیچیدگی محاسباتی و نقض حریم خصوصی جلوگیری می‌کند. از سوی دیگر، مشترکین شبکه هوشمند، با بکارگیری باتری‌ها قادر به ذخیره انرژی الکتریکی به مدت طولانی‌تر می‌باشند. در واقع، این تجهیزات با شارژ در ساعات کم‌باری و دشارژ در وسایل خانگی به هنگام پیک بار، موجب کاهش هزینه مشترکین و هموارشدن پروفیل بار و در نتیجه استفاده بهینه از شبکه توزیع می‌شوند. با این حال، عدم کنترل هوشمند شارژ و دشارژ این تجهیزات، می‌تواند موجب اضافه بار و تاثیرات نامطلوب در شبکه توزیع شده و قابلیت اطمینان و امنیت شبکه را کاهش دهد. در [۶، ۸]، زمان‌بندی بهینه مصرف بارهای پاسخگو و شارژ / دشارژ باتری‌ها در چارچوب بازی غیرهمکارانه برای مشترکین پیش‌بین قیمت ارائه شده است.

در شبکه هوشمند، با تبادل اطلاعات دیماند و قیمت بین مشترکین و شرکت برق، امکان شرکت مشترکین در برنامه‌های بهره‌برداری اقتصادی از شبکه فراهم می‌شود. یکی از شاخص‌های مهم که مقدار آن بیانگر بهره‌برداری اقتصادی از شبکه توزیع می‌باشد، ضریب بار است که نسبت متوسط بار شبکه به ماکزیمم آن در یک بازه زمانی معین است. با توجه به امکانات شبکه هوشمند، شرکت توزیع با انعقاد قراردادهای تشویقی با مشترکین، قادر به کاهش بار پیک در افق‌های مختلف بهره‌برداری و افزایش ضریب بار شده و در نتیجه کارایی شبکه افزایش خواهد یافت.

در این مقاله، یک مکانیسم جامع توزیع شده مدیریت انرژی روزپیش برای مشترکین مسکونی یک شبکه توزیع هوشمند در چارچوب بازی استکلبرگ یک‌رهبر-چندپرو معرفی و مدل می‌شود. شرکت توزیع به عنوان رهبر بازی با بکارگیری بهینه‌سازی تصادفی ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR)، قیمت انرژی روزپیش را تعیین و به مشترکین ارسال می‌کند. در واقع، شرکت توزیع با استفاده از بهینه‌سازی مبتنی بر ریسک، مقدار مشخصی از سود را در حضور عدم قطعیت قیمت انرژی در بازار بالادست، برای خود تضمین می‌کند. پیروان بازی استکلبرگ، مشترکین مسکونی قیمت‌پذیر بوده که هر کدام مجهز به سیستم مدیریت انرژی می‌باشند. این سیستم با دریافت بردار قیمت روزپیش، مصرف بارهای پاسخگو و الگوی شارژ / دشارژ باتری را زمان‌بندی می‌کند. تابع هدف هر مشترک مینیمم کردن هزینه‌ها است در حالی که رفاه خویش را ماکزیمم کند. علاوه بر این، سیستم مدیریت انرژی با در نظر گرفتن قید مشترک «تنظیم بار ماکزیمم شبکه در محدوده مشخص»، موجب افزایش ضریب بار، هموار شدن پروفیل بار شبکه و بهره‌برداری بهینه از شبکه توزیع می‌شود. از طریق قید مشترک تنظیم بار ماکزیمم بین مشترکین شبکه، فضای استراتژی مشترکین به یکدیگر وابسته شده و در نتیجه هر مشترک در یک بازی «غیرهمکارانه عام نش» نسبت به دیگر مشترکین قرار دارد. با استفاده

از تئوری «مساوی تغییراتی» اثبات می‌شود که بازی مدیریت انرژی پیشنهادی دارای یک نقطه تعادل «یکتا» بوده و بر همین اساس الگوریتم توزیع شده مناسب برای همگرا شدن به نقطه تعادل یکتا طراحی و شرایط همگرایی این الگوریتم استخراج می‌شود. الگوریتم پیشنهادی، ماکزیمم بار شبکه را کاهش و در نتیجه ضریب بار افزایش و هزینه صورت حساب برق مشترکین کاهش می‌یابد. نقطه تعادل بازی استکلبرگ مدیریت انرژی، یک بهینه اجتماعی است که در آن مجموع هزینه مشترکین مینیمم و سود شرکت توزیع ماکزیمم و در نتیجه رفاه اجتماعی ماکزیمم می‌شود.

ابتدا، در بخش ۲، مدل شبکه هوشمند ارائه شده و تابع هدف شرکت توزیع و مشترکین هوشمند فرمول بندی می‌شود. سپس در بخش ۳، چارچوب بازی مناسب برای بررسی مکانیسم مدیریت انرژی پیشنهادی معرفی و آنالیز می‌شود. الگوریتم توزیع شده برای رسیدن به نقطه تعادل استکلبرگ بهینه اجتماعی در بخش ۴ طراحی و بیان می‌شود. در بخش ۵، صحت الگوریتم مدیریت انرژی پیشنهادی شبیه سازی و ارزیابی خواهد شد. نهایتاً، در بخش ۶، نتیجه گیری مقاله ارائه شده است. اثبات لم و قضایای مقاله در ضمیمه بیان می‌شود.

۲- مدل شبکه هوشمند و فرمول بندی مساله

در این مقاله، مساله مدیریت انرژی روزپیش برای مشترکین خانگی یک شبکه هوشمند بررسی و تحلیل می‌شود. این شبکه متشکل از شرکت توزیع و N مشترک بوده و زمان بندی مصرف، در یک شبانه روز در بازه های یک ساعته انجام می‌شود. مجموعه مشترکین با $\mathcal{N} \triangleq \{1, \dots, N\}$ و مجموعه برنامه ریزی انرژی با $\mathcal{T} \triangleq \{1, \dots, T\}$ نشان داده شده که $T = 24$ است.

هر مشترک هوشمند دارای بارهای پاسخگو و غیر پاسخگو و مجهز به باتری است. از سوی دیگر هر مشترک از یک سیستم مدیریت انرژی بهره برده که این سیستم علاوه بر اتصال به فیدر توزیع، به یک بستر مخابراتی دوطرفه متصل است. این سیستم با دریافت / اشتراک اطلاعات زمان واقعی همچون قیمت و یا دیماند شبکه، با شرکت توزیع و دیگر مشترکین، میزان مصرف انرژی خانه هوشمند را کنترل و برنامه ریزی می‌کند.

در این شبکه هوشمند، شرکت توزیع قیمت انرژی روزپیش را به مشترکین ارسال و سیستم مدیریت انرژی هر مشترک در پاسخ به قیمت، بردار مصرف روزانه مشترک، $I_n = [I_n^1, \dots, I_n^T]$ را با برنامه ریزی مصرف بارهای پاسخگو و تنظیم نرخ شارژ / دشارژ باتری در هر ساعت از شبانه روز محاسبه و برای شرکت توزیع ارسال می‌دارد؛ شرکت توزیع قیمت جدید روزانه انرژی را بر اساس استراتژی بهترین پاسخ مشترکین، محاسبه و مجدداً به مشترکین از طریق بستر مخابراتی اعلام می‌کند. این فرایند تا رسیدن به یک نقطه تعادل قیمت - مصرف ادامه خواهد یافت. در این مکانیزم مدیریت انرژی پیشنهادی، فرض می‌شود که هر مشترک از برنامه ریزی مصرف روزپیش در هنگام

زمان واقعی کاملاً پیروی می‌کند.

در این شبکه، شرکت توزیع برنامه کاهش ماکزیمم بار شبکه را از طریق انعقاد قراردادهای تشویقی با مشترکین اجرا می‌کند. با کنترل ماکزیمم بار شبکه، مقدار ضریب بار به یک نزدیک شده و بهره برداری اقتصادی از شبکه ممکن و قابلیت اطمینان شبکه بهبود خواهد یافت. ضریب بار نسبت متوسط بار مجموع L_{ave} به ماکزیمم بار مجموع L_{Peak} در یک بازه زمانی مشخص است که در رابطه زیر نشان داده شده است.

$$LF = \frac{L_{ave}}{L_{Peak}} = \frac{\frac{1}{T} \sum_{t \in T} I^t}{\max_{t \in T} I^t}, \quad (1)$$

در این رابطه $I^t = \sum_{n \in \mathcal{N}} I_n^t$ مجموع بار مشترکین در زمان t می‌باشد. با توجه به قید مشترک تنظیم بار ماکزیمم شبکه بین مشترکین، مکانیزم مدیریت انرژی به گونه ای طراحی می‌شود که به نقطه کار بهینه اجتماعی همگرا شود. در چنین نقطه کاری، رفاه اجتماعی مشترکین و شرکت توزیع ماکزیمم خواهد شد. در واقع، در این نقطه، هر مشترک هزینه خود را به گونه ای بهینه کرده که مجموع هزینه مشترکین مینیمم می‌شود. مقدار هزینه مشترک ممکن است از حالتی که مشترک رفاه اجتماعی را در نظر نگیرد بیشتر باشد.

۲-۱- قیمت گذاری شرکت توزیع

شرکت توزیع باید در تمامی بازه های بهره برداری انرژی مورد نیاز مشترکین خویش را تامین نماید. در افق بهره برداری کوتاه مدت، شرکت توزیع در بازار روزپیش و بازار زمان واقعی شرکت کرده و دیماند مورد نیاز مشترکین را خریداری می‌نماید. با توجه به امکان ارتباط دوطرفه مخابراتی مشترکین و شرکت توزیع در شبکه هوشمند، شرکت با اعلام قیمت زمان واقعی به مشترکین، بر پروفیل بار آنها تاثیر خواهد گذاشت. عملاً مشترکین با دریافت قیمت دیماند از شرکت توزیع با بهینه نمودن تابع هدف خود، پروفیل بار مصرفی خود را در روزپیش محاسبه و آن را به شرکت توزیع اعلام می‌کنند. شرکت توزیع با دریافت پروفیل بار مشترکین، قیمت انرژی را برای مشترکین به گونه ای بروز کرده که سود خویش را ماکزیمم نماید.

شرکت توزیع با استفاده از داده های پیشین، قیمت انرژی در بازار بالادست π^t را به صورت یک متغیر تصادفی با تابع توزیع احتمال $f_\pi^t(\cdot)$ و تابع توزیع تجمعی $F_\pi^t(\cdot)$ در هر بازه زمانی مدل و پیش بینی کرده و با ماکزیمم نمودن مقدار مورد انتظار تابع سود خود مطابق رابطه (۲) قیمت بهینه فروش انرژی p به مشترکین را محاسبه می‌کند.

$$\begin{aligned} \max_{p \in P} f_D(p, I) &= (1 - \mu) \sum_{t \in T} \mathbb{E} \{ (\rho^t - \pi^t)^t \} + \mu CVaR_\alpha \left\{ \sum_{t \in T} (\rho^t - \pi^t)^t \right\} \\ P &\triangleq \left\{ (\rho^t)_{t=1}^T : \rho_{\min}^t \leq \rho^t \leq \rho_{\max}^t, 1/T \sum_{t \in T} \rho^t \leq \rho_{ave} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

در این رابطه، اپراتور $\mathbb{E}$ بیانگر مقدار مورد انتظار، $CVaR_\alpha$ سود

موردانتظار در $100\% \times (1-\alpha)$ بدترین سناریوها و $\alpha \in [0,1]$ سطح اطمینان است. μ ضریب وزنی است که بیانگر میزان ریسک‌پذیری شرکت توزیع است که هر چه مقدار μ افزایش یابد، مقدار موردانتظار سود کاهش خواهد یافت. در واقع، شرکت توزیع از چارچوب ارزش‌درمعرض‌ریسک‌شرطی CVaR برای بهینه‌سازی استفاده کرده تا عدم قطعیت قیمت در بازار بالادست را مدیریت کرده و میزان مشخصی از سود را در بدترین سناریوها برای خود تضمین نماید.

شرکت توزیع قیمت بهینه p را با توجه به مجموعه استراتژی ممکن $\mathcal{P}$ بر اساس بهترین پاسخ مشترکین I محاسبه می‌کند. با توجه به ظرفیت فیدرهای شبکه، بار مشترکین از مقدار معینی نباید تجاوز کرده که این مقدار تعیین‌کننده مقدار مینیمم قیمت انرژی $\rho_{\min}^t$ است. از سوی دیگر ماکزیمم قیمت انرژی باید به میزانی بوده که بار مینیمم تامین شود؛ بنابراین قیمت به مقدار مشخصی چون $\rho_{\max}^t$ محدود می‌شود. برای کنترل قدرت بازار شرکت توزیع، متوسط قیمت انرژی ρ_{ave} توسط قانون‌گذار تعیین می‌شود. با چنین استراتژی قیمت‌گذاری، رفتار مشترکین و شرکت توزیع می‌تواند تنظیم شود. تحلیل رابطه (۲) در توزیع احتمالی پیوسته دشوار است. بر همین اساس، با استفاده از نمونه‌برداری مونت کارلو، K نمونه $i.i.d$ از توزیع احتمالی تابع سود برداشت شده که رابطه (۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Max}_{\rho^t, z^t} f_D = \sum_{t \in T} & \left[(1-\mu) \left(\rho^t - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\pi_k^t) \right) I^t + \mu \left\{ c^t - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K z_k^t \right\} \right], \\ \text{s.t.: } \rho & \in \mathcal{P}, \mathcal{P} \triangleq \left\{ (\rho^t)_{t=1}^T : \rho_{\min}^t \leq \rho^t \leq \rho_{\max}^t, \frac{1}{T} \sum_{t \in T} \rho^t \leq \rho_{ave} \right\}, \\ z_k^t & \geq \sum_{i \in T} (c^i) - (\rho^i - \pi_k^i) I^i, z_k^t \geq 0, k=1, \dots, K, \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه بالا K بیانگر تعداد سناریوهای تصادفی قیمت در بازار بالادست است. π_k^t تحقق قیمت انرژی بالادست در سناریو k و زمان t می‌باشد. z_k^t و c متغیرهای کمکی هستند.

۲-۲-۲ مدل خانه هوشمند

هر خانه هوشمند، دارای باتری و بارهای پاسخگو است. این مشترکین انرژی مورد نیاز بارهای خود را با خرید انرژی از شرکت توزیع و بکارگیری ذخیره‌کننده انرژی، تامین می‌نمایند. تنظیم نرخ شارژ و دشارژ باتری و همچنین مصرف بارهای پاسخگو، با بهینه‌کردن هدف مشترک، مدیریت می‌شود. عملاً استراتژی تنظیم بار وسایل خانگی و باتری یک خانه هوشمند بایکدیگر مرتبط هستند؛ روش زمان‌بندی مصرف وسایل بر چگونگی شارژ و دشارژ باتری تأثیرگذار است و برعکس. در ادامه مدل ریاضی بخش‌های مختلف مشترک توزیع هوشمند و تابع هزینه مشترکین ارائه می‌شود.

۲-۲-۱ مدل باتری

باتری‌ها به هنگام ارزان بودن انرژی در شبکه، شارژ و در مواقع اوج بار

دشارژ شده و موجب کاهش هزینه مشترکین نسبت به گذشته می‌شوند. b_n^t بیانگر نرخ شارژ/دشارژ باتری مشترک n ام در زمان t می‌باشد. زمانی که $b_n^t > 0$ باتری شارژ و زمانی که $b_n^t < 0$ باتری دشارژ و وسایل خانگی مشترک را تغذیه می‌کند. بردار زمان‌بندی مصرف روزانه باتری مشترک برابر $B_n = [b_n^1, \dots, b_n^t, \dots, b_n^T]$ می‌باشد. برای حفظ عملکرد مطمئن باتری و افزایش طول عمر آن، میزان شارژ و دشارژ در محدوده مشخصی باید قرار گیرد.

$$-b_{n, \max} \leq b_n^t \leq b_{n, \max} \quad (4)$$

که $b_{n, \max}$ ، ماکزیمم نرخ شارژ / دشارژ باتری است. میزان انرژی ذخیره‌شده در باتری توسط پارامتر Soc_n^t نشان داده می‌شود. میزان انرژی ذخیره‌شده در باتری به میزان شارژ و دشارژ در بازه‌های زمانی گذشته وابسته است. برای اجتناب از اضافه‌شارژ شدن باتری، انرژی ذخیره شده در هر بازه زمانی از ماکزیمم ظرفیت باتری $E_{n, \max}$ نباید بیشتر شود که در رابطه زیر نشان داده شده است.

$$0 \leq Soc_n^0 + \sum_{i=1}^t b_n^i \leq E_{n, \max}, \quad \forall t \in T \quad (5)$$

از طرف دیگر فرض می‌شود که در پایان برنامه‌ریزی سطح مشخصی از انرژی Soc_n^T باید در باتری موجود باشد. بر همین اساس، با فرض Soc_n^0 به عنوان انرژی اولیه باتری، انرژی موردنیاز برای شارژ در افق برنامه‌ریزی برابر است با:

$$E_n^b = Soc_n^T - Soc_n^0, E_n^b = \sum_{t=1}^T b_n^t \quad (6)$$

با توجه به روابط بالا، مجموعه استراتژی باتری با مجموعه شدنی زیر نشان داده می‌شود:

$$B_n \triangleq \{ (b_n^t)_{t=1}^T : \text{constraints (4), (5), (6)} \} \quad (7)$$

در عمل، عمر باتری به نرخ شارژ / دشارژ در هنگام عملکرد وابسته است. تابع هزینه عملکرد باتری با یک چندجمله‌ای درجه دو می‌تواند مدل شود که در رابطه (۸) نشان داده شده است [۱۳]؛ در واقع، هرچه مقدار b_n^t بیشتر باشد؛ در طول زمان، عمر باتری کاهش خواهد یافت.

$$\text{Battery Cost} = \sum_{t \in T} \left\{ \frac{\xi_n}{2} (b_n^t)^2 + \delta_n \right\} \quad (8)$$

که ξ_n و δ_n ضرایب ثابت می‌باشند.

۲-۲-۲ بارهای پاسخگو و غیر پاسخگو

در زمینه پاسخگویی بار، برخی وسایل خانگی در برابر تغییرات قیمت انرژی، غیرمنعطف بوده و میزان تقاضای خود را تغییر نخواهند داد. دسته دوم وسایل خانگی رفتار منعطفی در برابر تغییرات قیمت

$$\bar{\mathcal{L}}_n \triangleq \{(d_n^t, b_n^t)_{t=1}^T \mid d_n^t \in \mathcal{D}_n, b_n^t \in \mathcal{B}_n, 0 \leq l_n^t \leq l_n^{\max}\} \quad (11)$$

هدف مشترکین این شبکه، کاهش هزینه خود بوده در حالی که مطلوبیت خویش از مصرف انرژی را ماکزیمم می کنند. با توجه به اینکه مشترکین در برنامه کاهش ماکزیمم بار شبکه نیز شرکت می کنند؛ فضای استراتژی شدنی مشترکین به یکدیگر وابسته شده و علاوه بر قیود فردی، قیود مشترک نیز به مجموعه استراتژی آنها اضافه می شود؛ بر همین اساس، مساله بهینه سازی هر مشترک به صورت رابطه (۱۲) قابل بیان است.

$$\begin{aligned} \min_{l_n \in \mathcal{L}_n} f_n(l_n, \rho) &= \sum_{t \in T} \mathbb{E} \left\{ \rho^t l_n^t + \frac{\xi_n}{2} (b_n^t)^2 + \delta_n - U_n^t \right\}, \\ \mathcal{L}_n &\triangleq \{(l_n^t)_{t=1}^T : l_n^t \in \bar{\mathcal{L}}_n, L_{Peak}^{\min} \leq L_{Peak}(l_n) \leq L_{Peak}^{\max}\}, \end{aligned} \quad (12)$$

در رابطه (۱۲) $L_{Peak}^{\max}$ و $L_{Peak}^{\min}$ محدوده مجاز قید مشترک را مشخص کرده و با تنظیم دقیق این مقادیر، شرکت توزیع قادر به هموارتر کردن پروفیل بار شبکه می شود. قید مشترک $L_{Peak}^{\min} \leq L_{Peak}(l_n) \leq L_{Peak}^{\max}$ به دو قید مجزا $L_{Peak}^{\min} - L_{Peak} \leq 0$ و $L_{Peak} - L_{Peak}^{\max} \leq 0$ تقسیم شده و به شکل خلاصه $L_{Peak}(l_n) \leq 0$ در ادامه مقاله نشان داده می شود. تابع مطلوبیت مشترک n ام در زمان t است. تابع مطلوبیت بیان کننده سطح رضایت مشترکین از مصرف انرژی الکتریکی است. در این مقاله از تابع مطلوبیت درجه دوم [۴] استفاده شده که ویژگی های لازم برای مدل کردن مناسب سطح رضایت مشترک را در بر دارد. این تابع در رابطه (۱۳) نشان داده شده است.

$$U_n^t(d_n^t, \omega_n^t, \kappa_n^t) = \omega_n^t (D_{n, inl}^t + d_n^t) - \frac{\kappa_n^t}{2} (D_{n, inl}^t + d_n^t)^2, \quad (13)$$

که ω_n^t و κ_n^t پارامترهای مشخصی هستند که مقدار آنها برای مشترکین مختلف، متفاوت است. در صورتی که این مقادیر به درستی تعیین شوند؛ رفتار مصرف مشترکین به خوبی مدل خواهد شد.

۲-۳-۱- مکانیزم مدیریت انرژی و رفاه اجتماعی

با توجه به وجود قید مشترک بین مشترکین و تابع هدف آنها، مساله مدیریت انرژی در سمت مشترکین، معادل مساله بهینه سازی زیر است.

$$\begin{aligned} \min_{l \in \mathcal{L}} f(l, \rho) &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{t \in T} \mathbb{E} \left\{ \rho^t l_n^t + \frac{\xi_n}{2} (b_n^t)^2 + \delta_n - U_n^t \right\}, \\ \mathcal{L} &\triangleq \{(l^t)_{t=1}^T : L_{Peak}^{\min} \leq \max_{t \in T} l^t \leq L_{Peak}^{\max}\}, \end{aligned} \quad (14)$$

با توجه به رابطه (۳) و (۱۴)، با یکارگیری سیستم مدیریت انرژی پیشنهادی، شرکت توزیع و مشترکین عملاً با بهینه نمودن تابع هدف خویش، رفاه اجتماعی سیستم را بهینه می کنند.

داشته و قابلیت تغییر و انتقال مصرف به دیگر ساعات با قیمت انرژی کم، را دارا می باشند. در این سیستم، بارهای پاسخگو و غیرپاسخگو توسط باتری و شبکه توزیع تغذیه می شوند. با فرض اینکه $\mathcal{A}_n \triangleq \{1, \dots, A_n\}$ بیانگر مجموعه وسایل با طبیعت پاسخگو مشترک n ام است، بردار مصرف هر وسیله با طبیعت پاسخگو $a_n \in \mathcal{A}_n$ برابر $D_{n, a_n} = [d_{n, a_n}^1, \dots, d_{n, a_n}^{t_{n, a_n}}, \dots, d_{n, a_n}^{T_{n, a_n}}]$ بوده که d_{n, a_n}^t میزان مصرف وسیله a_n ام مشترک n ام در زمان t می باشد. در واقع وظیفه سیستم مدیریت انرژی در خانه هوشمند، انتخاب بردار بهینه مصرف d_{n, a_n}^t برای هر وسیله مشترک به گونه ای است که مطلوبیت مشترک ماکزیمم شود. برای هر وسیله مشترک $a_n \in \mathcal{A}_n$ ، مقدار انرژی مصرفی روزانه معین E_{n, a_n} که از قبل مقدار آن مشخص است، در نظر گرفته می شود. در این زمان بندی مصرف پیشنهادی، مقدار انرژی مورد نیاز روزانه وسایل تغییر داده نشده و تنها مصرف آن مدیریت شده و به بازه های دیگر به گونه ای که تابع هدف مشترک برآورده شده، انتقال داده می شود. در این حالت هر مشترک باید زمان شروع $t_{n, a_n}^s \in T_{n, a_n}$ و زمان پایان $t_{n, a_n}^f \in T_{n, a_n}$ زمان بندی را انتخاب کند. بنابراین در زمان بندی بارهای پاسخگو، قید زیر باید لحاظ شود:

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_{n, a_n}^s}^{t_{n, a_n}^f} d_{n, a_n}^t &= E_{n, a_n}, d_{n, a_n}^t \leq d_{n, a_n}^t \leq d_{n, a_n}^t, \forall t \in T_{n, a_n}, \\ d_{n, a_n}^t &= 0, \forall t \notin T_{n, a_n}, \end{aligned} \quad (9)$$

همانطور که گفته شد، E_{n, a_n} انرژی روزانه مورد نیاز وسایل خانگی برای انجام وظیفه خود بوده که در بازه زمانی $T_{n, a_n} = [t_{n, a_n}^s, t_{n, a_n}^f]$ باید فراهم شود. برای هر وسیله بازه زمانی تغذیه الکتریکی آن باید بزرگتر یا مساوی از بازه زمانی لازم برای پایان عملکرد آن می باشد. برای هر وسیله مشترک، مینیمم مصرف d_{n, a_n}^t و ماکزیمم مصرف d_{n, a_n}^t در هر بازه زمانی با توجه به طبیعت وسیله در نظر گرفته می شود. بر همین اساس، مجموعه استراتژی مصرف بارهای پاسخگو هر مشترک توسط مجموعه شدنی $\mathcal{D}_n$ مشخص می شود.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{n, a_n} &\triangleq \{(d_{n, a_n}^t)_{t=1}^T : \text{constraint (9)}\} \\ \mathcal{D}_n &\triangleq \{(d_n^t)_{t=1}^T : d_n^t = (d_{n, 1}^t, \dots, d_{n, A_n}^t), d_{n, a_n}^t \in \mathcal{D}_{n, a_n}\} \end{aligned} \quad (10)$$

۲-۳-۲- تابع هدف مشترک هوشمند

هر مشترک در زمان t ، میزان انرژی $\sum_{a_n \in \mathcal{A}_n} d_{n, a_n}^t$ را از شرکت توزیع خریداری کرده که $d_{n, inl}^t$ میزان مصرف بارهای غیرپاسخگو در زمان t است. با توجه به محدودیت ظرفیت فیدرهای توزیع، میزان مصرف هر مشترک محدود به مقدار $l_n^{\max}$ است. از طرف دیگر، فرض می شود مشترکین مجاز به تزریق انرژی به شبکه توزیع نیستند. با توجه به آنچه بیان شد، مجموعه استراتژی شدنی هر مشترک به صورت رابطه (۱۱) نشان داده می شود.

۳- بازی مدیریت انرژی

در برنامه مدیریت انرژی پیشنهادی، تعاملات عامل‌های هوشمند به دو بخش مجزا تقسیم می‌شود. ۱- تعامل شرکت توزیع و مشترکین ۲- تعامل بین مشترکین که ناشی از در نظر گرفتن قید مشترک تنظیم ماکزیمم بار شبکه در مساله بهینه‌سازی مشترکین است. در ادامه، بازی‌های مناسب برای مدل کردن تعاملات مذکور معرفی و نتیجه بازی‌ها و خصوصیات آنها بررسی و تحلیل می‌شود.

۳-۱- تعامل شرکت توزیع و مشترکین: بازی استکلبرگ

شرکت توزیع در ابتدا قیمت انرژی را تعیین و برای مشترکین ارسال می‌کند. سیستم مدیریت انرژی مشترکین بر اساس قیمت تعیین شده، برادر مصرف روزانه هر مشترک را محاسبه و به شرکت توزیع می‌فرستد. بنابراین بازی استکلبرگ چارچوب مناسبی برای مدل کردن این تعامل است.

تعریف ۱: بازی استکلبرگ مدیریت انرژی، $\mathcal{G}$ ، با مجموعه $\mathcal{G} = \{\mathcal{N} \cup \{\text{DISCO}\}, \mathcal{P}, \{L_n\}_{n \in \mathcal{N}}, f_D, \{f_n\}_{n \in \mathcal{N}}\}$ نشان داده می‌شود که ۱) $\mathcal{N} \cup \{\text{DISCO}\}$ بیانگر مجموعه بازیگران بازی استکلبرگ است که در آن شرکت توزیع، DISCO، رهبر بازی و $\mathcal{N}$ مجموعه مشترکین که پیروان بازی می‌باشند؛ ۲) $\mathcal{P}$ و L_n به ترتیب بیانگر مجموعه استراتژی شدنی شرکت توزیع و هر مشترک مطابق رابطه (۳) و (۱۲) می‌باشند؛ ۳) f_D و f_n به ترتیب بیانگر توابع هدف شرکت توزیع و هر مشترک مطابق رابطه (۳) و (۱۲) می‌باشند.

۳-۲- تعامل بین مشترکین: بازی غیرهمکارانه عام نش

هر مشترک $n \in \mathcal{N}$ با دریافت سیگنال قیمت، مصرف بارهای پاسخگو و میزان شارژ / دشارژ باتری را به گونه‌ای برنامه‌ریزی کرده که قید مشترک تنظیم ماکزیمم بار شبکه برآورده شود. بر همین اساس هر مشترک در یک بازی عام نش با دیگر مشترکین قرار دارد [۱۴].

تعریف ۲: بازی عام نش مشترکین، $\bar{\mathcal{G}}$ ، با مجموعه $\bar{\mathcal{G}} = \{\mathcal{N}, \{L_n\}_{n \in \mathcal{N}}, \{f_n\}_{n \in \mathcal{N}}\}$ نشان داده می‌شود.

۳-۳- تعادل استکلبرگ و عام نش

نقطه تعادل استکلبرگ در بازی غیرهمکارانه یک رهبر - چند پیرو، با بهینه کردن هدف رهبر در پاسخ به مجموعه بهترین پاسخ پیروان حاصل می‌شود. این در حالی است که با توجه به قید مشترک تنظیم بار ماکزیمم شبکه، پیروان در پاسخ به استراتژی اعلام شده توسط رهبر، مفهوم خاصی از تعادل که همان نقطه تعادل عام نش است را با یکدیگر بازی می‌کنند.

برای محاسبه تعادل عام مشترکین، مساله بهینه‌سازی هر مشترک با معادل KKT آن جایگزین شده و ضرایب جریمه λ در صورت نقض

قید مشترک $L_{Peak}^{\min} \leq L_{Peak}(I) \leq L_{Peak}^{\max}$ توسط شرکت توزیع محاسبه و به مشترکین اعلام می‌شود. در چنین حالتی، سیستم مدیریت انرژی مشترکین مساله بهینه‌سازی زیر را حل می‌کند.

$$\min_{I_n \in \mathcal{L}_n} f_{n, \text{aug}} = f_n(I_n, I_{-n}) + \lambda^T L_{Peak}(I), \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad (15)$$

بازی استکلبرگ مدیریت انرژی، با ارسال قیمت بهینه ρ توسط شرکت توزیع به مشترکین آغاز شده و هر مشترک بهترین پاسخ خود I_n را با در نظر گرفتن ضرایب جریمه λ که توسط شرکت توزیع محاسبه شده، تعیین کرده و در نهایت بازی مشترکین به نقطه تعادل عام نش همگرا می‌شود. پس از آن، مشترکین پروفیل بار خود را به شرکت توزیع ارسال می‌نمایند. شرکت توزیع با بهینه کردن تابع هدف خود، مجدداً قیمت بهینه را محاسبه و برای مشترکین ارسال می‌کند. این پروسه تا رسیدن به نقطه تعادل استکلبرگ (I^*, ρ^*) ادامه دارد.

تعریف ۳: در بازی مدیریت انرژی استکلبرگ مجموعه استراتژی (I^*, ρ^*) نقطه تعادل بهینه بازی بوده اگر و فقط اگر نامعادلات زیر برآورده شود:

$$\begin{aligned} f_{n, \text{aug}}(I_n^*, I_{-n}^*, \rho^*) &\leq f_{n, \text{aug}}(I_n, I_{-n}^*, \rho^*) \\ f_D(\rho^*, I^*) &\geq f_D(\rho, I^*) \end{aligned} \quad (16)$$

در این رابطه I_{-n} استراتژی مشترکین به غیر از مشترک n ام است. در نقطه تعادل استکلبرگ، هیچ مشترکی با انحراف از استراتژی تعادل استکلبرگ قادر به بهبود تابع هدف خود در حالی که دیگر مشترکین استراتژی استکلبرگ را بازی می‌کنند، نمی‌باشد. به طور مشابه شرکت توزیع با انحراف از استراتژی قیمت در نقطه تعادل استکلبرگ، قادر به افزایش سود خود نیست.

۳-۴- وجود نقطه تعادل استکلبرگ و خصوصیات آن

تابع هدف شرکت توزیع یک تابع محدب بوده و بنابراین با استفاده از هر روش بهینه‌سازی محدب قابل حل است. یکی از روش‌های بررسی وجود نقطه تعادل برای بازی‌های غیرهمکارانه نش، بکارگیری نامساوی تغییراتی است. در مساله نامساوی تغییراتی $VI(\mathcal{L}, F)$ ، نقطه $I^* \in \mathcal{L}$ به گونه‌ای محاسبه شده که نامساوی زیر برقرار باشد [۱۴].

$$(I - I^*)^T F(I^*) \geq 0, \quad \forall I \in \mathcal{L}. \quad (17)$$

پاسخ رابطه (۱۷) حل تغییراتی نامیده شده که با بررسی ویژگی یکنوایی بردار تابع F تعیین می‌شود. گرچه این روش به صورت گسترده برای مسایل نش بکاربرده می‌شود؛ با این حال بکارگیری این ابزار در تمامی مسایل عام نش جوابگو نیست. با این وجود، در صورتی که $\bar{\mathcal{G}}$ ۱ برقرار باشد، محاسبه تعادل عام نش $\bar{\mathcal{G}}$ با بررسی مساله نامساوی تغییراتی $VI(\mathcal{L}, F)$ امکان‌پذیر است [۱۴].

لم ۱: در بازی عام نش $\bar{\mathcal{G}}$ در صورتی که ۱) مجموعه استراتژی هر

که تغییر ضرایب جریمه بین دو تکرار v ناچیز شود، ادامه می‌یابد. در واقع، شرکت توزیع با دریافت بار مجموع مشترکین، ضرایب جریمه را در هر تکرار v محاسبه می‌کند. در بخش سوم و حلقه درونی الگوریتم مصرف مشترکین (زمان‌بندی بارهای پاسخگو و شارژ و دشارژ باتری) با توجه به قیمت و ضرایب جریمه حاصل می‌شود. در این مرحله مشترکین با حل مساله (۱۵)، به بازی عام نش با یکدیگر پرداخته و نتیجه این بازی، محاسبه نقطه تعادل عام نش $I^{(i)} = (d_n^{(i)}, b_n^{(i)})$ می‌باشد. بازی عام نش توسط شرکت توزیع با بررسی یک معیار مشخص خاتمه خواهد یافت. برای مثال، زمانی که تغییر نسبی بارمجموع شبکه بین دو تکرار ناچیز باشد؛ یعنی $\|I^{(i)} - I^{(i-1)}\|_2 / \|I^{(i)}\|_2 \leq \varepsilon$ ؛ بازی عام نش خاتمه یافته و مشترکین پروفیل بار خود را در روزپیش به شرکت توزیع اعلام می‌کنند. الگوریتم مدیریت انرژی و شرایط همگرایی آن به ترتیب در الگوریتم ۱ و قضیه ۳ نشان داده شده است.

Algorithm 1: Algorithm to reach social optimal Stackelberg Equilibrium

Data: Set $i=0, h=0, v=0$. Given $L_{Peak}^{\min}, L_{Peak}^{\max}$, any feasible starting point $((I_n^{(0)})_{n=1}^N, \lambda^{(0)} \geq 0, I^{(0)})$.

Step 1: If $\|\rho^{(h)} - \rho^{(h-1)}\|_2 / \|\rho^{(h)}\|_2 \leq \varepsilon$, **STOP. The game reaches to social optimal Stackelberg Equilibrium (I^*, ρ^*) .**

Step 2: DISCO computes optimal day-head price ρ^* , as $\rho^* \in \arg \min_{\rho \in P} \{f_D\}$.

Step 3: $h \leftarrow h+1$; DISCO sends optimal day-head price ρ^* and aggregate load vector I to customers.

Step 4: If $\|\lambda^{(v)} - \lambda^{(v-1)}\|_2 \leq \varepsilon$, Go to Step 1.

Step 5: DISCO chooses $\tau^{(v)} > 0$ and updates $\lambda^{(v+1)}$ according to $\lambda^{(v+1)} = [\lambda^{(v)} + \tau^{(v)} L_{Peak}(I(\lambda^{(v)}))]^+$

Step 6: $v \leftarrow v+1$; DISCO sends λ to customers.

Step 7: If $\|I^{(h)} - I^{(h-1)}\|_2 / \|I^{(h)}\|_2 \leq \varepsilon$, **The game reaches to GN equilibrium.** Customers send his load profile to DISCO; Go to Step 4.

Step 8: Each customer calculates unique solution $I_n^{(i+1)} \triangleq \{d_n^{(i+1)}, b_n^{(i+1)}\}$ as $I_n^{(i+1)} \in \arg \min_{I_n \in \bar{L}_n} \{f_n + (\lambda)^T L_{Peak}(I_n, I^{(i)})\}$.

Step 9: $i \leftarrow i+1$; Go to Step 7.

قضیه ۳: در بازی قویا یکنوا عام نش $\bar{G}$ ، در صورتی که دنباله $\{\tau^v\}_{v=1}^\infty$ به گونه‌ای انتخاب شود که در رابطه زیر صدق کند:

$$0 < \inf_v \tau^v < \sup_v \tau^v < 2 \frac{\min\{\sigma_n\}_{n=1}^N}{\sqrt{(N+A_1+\dots+A_n+\dots+A_N)}} \quad (18)$$

آنگاه هر دنباله $\{I^{(v)}\}_{v=1}^\infty$ تولیدشده توسط الگوریتم ۱ به نقطه تعادل یکنای بازی عام نش همگرا می‌شود. اثبات در ضمیمه ۳ می‌باشد.

۵- شبیه‌سازی و نتایج عددی

در این بخش، عملکرد روش پیشنهادی مدیریت انرژی در یک شبکه نمونه، شبیه‌سازی و ارزیابی می‌شود. الگوریتم معرفی شده در یک شبکه

بازیکن $\mathcal{L}_n$ محدب و بسته باشد؛ ۲) به ازای هر مجموعه استراتژی ثابت دیگر مشترکین به غیر از مشترک n ام $I_{-n} \in \mathcal{L}_{-n}$ ، تابع هدف مشترک نسبت به I_n محدب و دوبار مشتق‌پذیر پیوسته باشد؛ ۳) قید مشترک بین مشترکین نسبت به I محدب و مشتق‌پذیر باشد؛ آنگاه در این صورت، هر حل مساله نامساوی تغییراتی $VI(\bar{L}, F)$ که $I \triangleq \prod_{n=1}^N I_n$ و $\mathcal{L} \triangleq \prod_{n=1}^N \mathcal{L}_n$ ، $F(I) \triangleq (\nabla_{I_n} f_n(I))_{n=1}^N$ ، نقطه تعادل بازی عام نش $\bar{G}$ است. اثبات در ضمیمه ۱ است.

با توجه به اینکه شرایط لم ۱ برقرار است، برای محاسبه نقطه تعادل عام نش $\bar{G}$ ، نامساوی تغییراتی $VI(\bar{L}, F)$ در قضیه ۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

قضیه ۱: نامساوی تغییراتی $VI(\bar{L}, F)$ قویا یکنوا بوده و دارای حل بهینه یکتا است. بنابراین با توجه به معادل بودن نامساوی تغییراتی با بازی عام نش بین مشترکین، بازی غیرهمکارانه عام نش دارای یک نقطه تعادل یکتا است. اثبات در ضمیمه ۲ است.

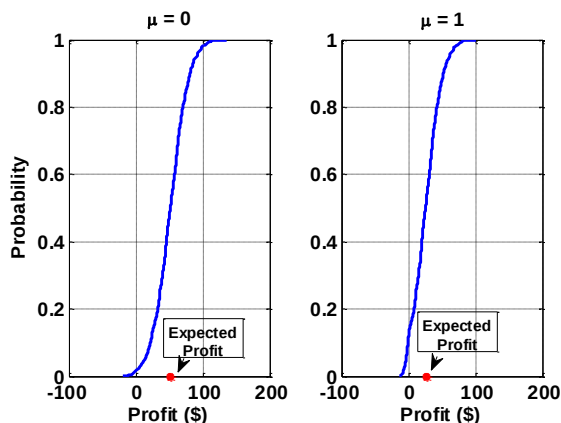
قضیه ۲: نقطه تعادل استکلبرگ بازی مدیریت انرژی یک نقطه تعادل «بهینه اجتماعی» است.

اثبات: هر مشترک با بهینه کردن هزینه خود و در نظر گرفتن قید مشترک تنظیم بار ماکزیمم شبکه عملاً در ماکزیمم کردن رفاه اجتماعی مطابق رابطه (۱۴) شرکت می‌کند. بر همین اساس و با توجه به قضیه ۱ که نامساوی تغییراتی $VI(\bar{L}, F)$ قویا یکنوا و دارای یک نقطه تعادل یکتا است؛ تعادل استکلبرگ یک نقطه کار بهینه اجتماعی است.

۴- الگوریتم توزیع شده مدیریت انرژی

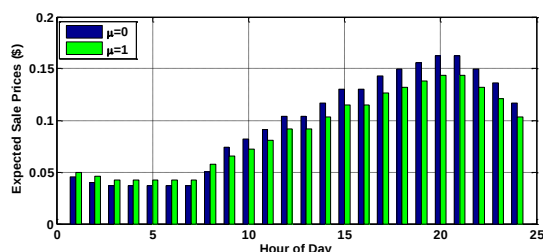
برای رسیدن به نقطه تعادل در بازی‌های قویا یکنوا از الگوریتم‌های توزیع شده آسنکرون مبتنی بر بهترین پاسخ استفاده می‌شود [۱۵]. در این الگوریتم بعضی بازیگران نسبت به دیگران، استراتژی خود را به مراتب بیشتر به روز کرده و یا از اطلاعات قدیمی برای به‌روز کردن استفاده می‌کنند [۱۵]. برای رسیدن به نقطه تعادل استکلبرگ، الگوریتم توزیع شده توسط شرکت توزیع و سیستم مدیریت انرژی مشترکین با استفاده از زیرساخت مخابراتی اجرا می‌شود. در این الگوریتم توزیع شده، شرکت توزیع به عنوان رهبر بازی استکلبرگ قیمت بهینه انرژی را محاسبه و به مشترکین ارسال می‌کند. هر مشترک، با استفاده از بار شبکه، قیمت و ضرایب جریمه λ ، استراتژی مصرف خود را با حل مساله بهینه‌سازی خویش به‌روز می‌کند. الگوریتم مدیریت انرژی پیشنهادی شامل سه بخش است. بخش اول، حلقه تعیین قیمت روزپیش $\rho^{(h)}$ بوده که توسط شرکت توزیع بر اساس بار شبکه در هر تکرار محاسبه شده و به مشترکین ارسال می‌شود. این حلقه تا زمانی که تغییر نسبی قیمت انرژی بین دو تکرار h ناچیز باشد، تکرار می‌شود. بخش دوم حلقه تعیین ضرایب جریمه $\lambda^{(v)}$ بوده که توسط شرکت توزیع با استفاده از روش پروجکشن با گام متغیر $\tau^{(v)}$ [۱۵] که شرایط انتخاب گام در هر تکرار v مطابق قضیه ۳ می‌باشد، محاسبه و به مشترکین مخابره می‌شود. این فرایند تا زمانی

توزیع احتمال تجمعی سود شرکت توزیع به ازای $\mu = \{0,1\}$ در شکل (۲) نشان داده شده است. مطابق شکل، مقدار موردانتظار سود شرکت توزیع در $\mu = 1$ برابر ۲۶,۱۳۱۵ که از مقدار آن در $\mu = 0$ که برابر ۵۱,۵۶۳۵ است، کمتر است. این کاهش ۴۹,۳۲٪ در سود موردانتظار منجر به کاهش ۲۶,۷۸٪ بدترین سناریوی سود از \$ ۱۹,۷۸ - به \$ ۱۴,۴۸ - می شود. بنابراین، چارچوب بهینه سازی مبتنی برریسک شرطی ابزار مناسبی برای کاهش ریسک همراه با سود متغیر است.



شکل (۲): توزیع احتمال تجمعی سود شرکت توزیع در $\mu = \{0,1\}$

بردار قیمت بهینه فروش انرژی در دو حالت $\mu = \{0,1\}$ در شکل (۳) نشان داده شده است. مطابق شکل، قیمت فروش انرژی در حالت $\mu = 1$ نسبت به حالت $\mu = 0$ ، در ساعات کم باری بیشتر و در بقیه ساعات کمتر است. در واقع، قیمت انرژی به گونه ای در چارچوب بهینه سازی مبتنی برریسک شرطی تعیین می شود که مقدار مشخصی از سود در بدترین سناریوها تضمین شود.



شکل (۳): بردار قیمت بهینه فروش انرژی به مشترکین در $\mu = \{0,1\}$

برای بررسی عملکرد سیستم مدیریت انرژی پیشنهادی، دو سناریو بررسی شده است. در تمامی سناریوها، خانه هوشمند از وسایل پاسخگو و باتری بهره می برد. در سناریوی اول، مشترکین در مکانیسم مدیریت انرژی شرکت نکرده؛ این در حالی است که در سناریوی دوم خانه هوشمند در برنامه مدیریت انرژی شرکت می کند. در سناریوی دوم، امکان شارژ و دشارژ برای باتری خانه هوشمند فراهم است.

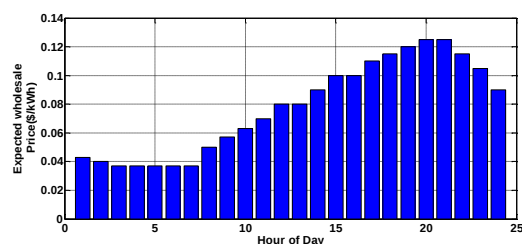
در شکل (۴) پروفیل دیماند روزانه شبکه در دو سناریو نشان داده شده است. همان طور که از شکل دیده می شود، سیستم مدیریت انرژی

هوشمند با ۲۰ مشترک در نرم افزار MATLAB شبیه سازی شده است. برای حل مساله بهینه سازی مشترکین و شرکت توزیع از برنامه CVX [۱۶]، استفاده شده که برای حل مسایل بهینه سازی محدب استفاده می شود. هر مشترک دارای وسایل خانگی بوده که قیود زمان بندی مصرف انرژی آنها متفاوت است. برخی از وسایل در زمان بندی مصرف انعطاف پذیر هستند؛ برای مثال می توان به خودروی برقی، لباسشویی، خشک کن و ماشین ظرفشویی اشاره نمود. در مقابل وسایل غیرپاسخگو بوده که الگوی مشخصی برای زمان بندی مصرف دارند و قابلیت شرکت در برنامه های مدیریت انرژی را نداشته که در این میان از فریزر، تلویزیون، روشنایی و وسایل گرمایشی می توان نام برد. مصرف روزانه بارهای غیرپاسخگو مشترکین و همچنین مصرف بارهای پاسخگو مدیریت نشده آنها بر اساس مدل های واقعی تولید شده است [۱۷]. در شبکه هوشمند نمونه، هر مشترک دارای چهار وسیله با طبیعت پاسخگو همچون لباسشویی، خشک کن، ماشین ظرفشویی و خودروی برقی بوده و بقیه بارهای آن غیرپاسخگو فرض شده که در برنامه مدیریت انرژی شرکت نمی کنند. همان طور که قبلاً ذکر شد، تمامی مشترکین مجهز به باتری می باشند. ظرفیت باتری مشترکین به صورت تصادفی در بازه ۰.۵-۲ کیلووات ساعت تعیین شده است. سطح شارژ ابتدایی و انتهای باتری مشترکین به ترتیب در بازه ۰.۲ - ۰.۳ و ۰.۵ - ۰.۶ برابر ماکزیمم ظرفیت باتری ها قرار دارد.

قیمت انرژی در بازار بالادست به صورت یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال مدل شده که به منظور بهینه سازی تصادفی، ۱۰۰۰ نمونه مستقل با توزیع مشابه به روش مونت کارلو برداشت شده است. مقادیر پارامترهای ثابت سیستم در جدول (۱) نشان داده شده است. مطابق جدول (۱)، ضریب μ برابر ۰.۵ فرض شده است که در واقع تاثیر در نظر گرفتن عدم قطعیت و میانگین موردانتظار بردار قیمت، برابر خواهد شد. مقدار موردانتظار قیمت انرژی پیش بینی شده بازار بالادست در روزپیش در شکل (۱) نشان داده شده است.

جدول (۱): مقادیر پارامترهای ثابت سیستم

پارامتر	مقدار
α	۰.۹
μ	۰.۵
$\rho_{\min}$	π
$\rho_{\max}$	۱.۳π
ρ_{ave}	$۱.۲ \pi_{ave}$



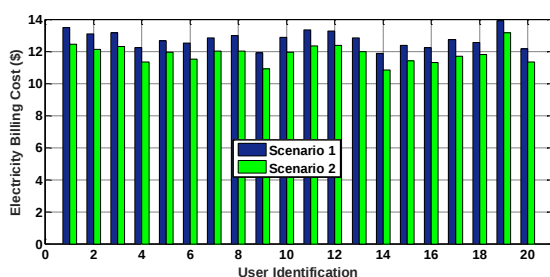
شکل (۱): متوسط قیمت انرژی در بازار بالادست

همین دلیل، هزینه صورت حساب برق روزانه هر مشترک در دو سناریو در شکل (۶) نشان داده شده است.

جدول (۲): ضریب بار، ماکزیمم دیماند و مجموع صورت حساب مشترکین

سناریو	ضریب بار	ماکزیمم دیماند شبکه (kW)	مجموع صورت حساب مشترکین (\$)
۱	۰.۴۳۰۶	۱۹۶.۳۱	۲۵۴.۹۳۳
۲	۰.۵۵۱۳	۱۵۳.۶۹۹۱	۲۳۶.۸۲۸۲

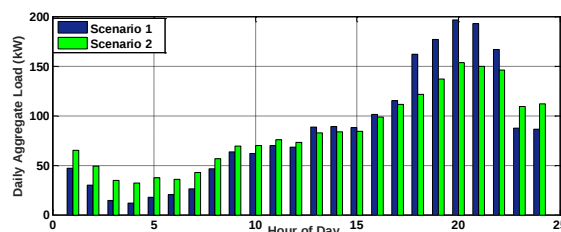
همان طور که در شکل نشان داده شده است، صورت حساب تک تک مشترکین در سناریوی دوم نسبت به سناریوی اول کاهش یافته است. همان گونه که قبلاً ذکر شد، مشترکین با بکارگیری سیستم مدیریت انرژی پیشنهادی و تنظیم مصرف بارهای پاسخگو و همچنین امکان شارژ باتری در کمباری و دشارژ آن در پرباری در سناریوی دوم، هزینه صورت حساب خود را تا حد امکان کاهش می دهند. از سوی دیگر، به دلیل شرکت مشترکین در برنامه کاهش ماکزیمم دیماند و ارائه تشویق از سوی شرکت توزیع به آنها، منافع اقتصادی بیشتری نصیب مشترکین خواهد شد. در چنین حالتی، شرکت توزیع نیز با کاهش یافتن ماکزیمم دیماند شبکه و افزایش ضریب بار، فرصت بهره برداری اقتصادی از شبکه توزیع را داشته و قابلیت اطمینان و بازده شبکه نیز افزایش می یابد.



شکل (۶): هزینه صورت حساب برق روزانه هر مشترک

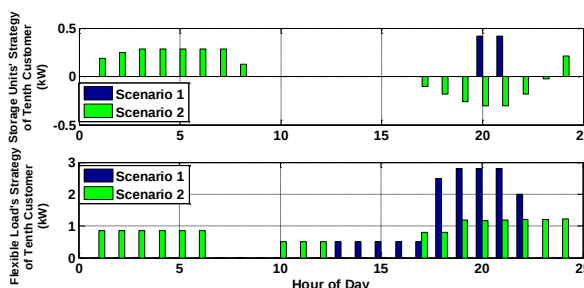
برای بررسی تاثیر رفتار مشترکین بر شاخص های عملکردی سیستم همچون ضریب بار و هزینه مجموع صورت حساب برق روزانه مشترکین، مقادیر پارامترهای ω_n و ξ_n که به ترتیب برای مدل کردن هزینه بکارگیری باتری و میزان مطلوبیت مشترکین از مصرف انرژی الکتریسته بکار می روند؛ تغییر داده می شود. نتیجه این بررسی به ترتیب در شکل (۷) و شکل (۸) نشان داده شده است. همان طور که در شکل (۷) مشخص است، با افزایش پارامتر ξ_n برای تمامی مشترکین، ضریب بار کاهش و هزینه مجموع صورت حساب برق مشترکین افزایش می یابد. در واقع، افزایش ξ_n به معنای عدم تمایل مشترکین به شارژ و دشارژهای متوالی باتری برای اجتناب از پیرشدن باتری و کاهش عمر آن بوده که در عمل به میزان کمتری بار ماکزیمم شبکه کاهش یافته و در نتیجه ضریب بار کاهش و هزینه برق مصرفی مشترکین افزایش

پیشنهادی پروفیل دیماند شبکه را مسطح تر و ماکزیمم دیماند شبکه را کاهش داده که منجر به افزایش ضریب بار و کاهش صورت حساب مشترکین می شود. در واقع، این مساله با انتقال مصرف بارهای پاسخگو از ساعات پیک به ساعات کمباری و همچنین شارژ باتری در زمان کمباری و دشارژ آن در وسایل خانگی مشترک در زمان پرباری است.



شکل (۴): دیماند شبکه در یک شبانه روز

استراتژی بارهای پاسخگو و باتری مشترک دهم در دو سناریوی مفروض در شکل (۵) نشان داده شده است. همان گونه که در شکل مشخص است، در سناریوی دوم، با توجه به قیمت پایین انرژی در ساعات کمباری، مشترک عمده مصرف بارهای پاسخگوی خود را که در این شبکه نمونه عمدتاً شارژ خودروهای برقی است؛ در این ساعات انجام می دهد. از سوی دیگر، باتری مشترک در ساعات کمباری با توجه به قیمت پایین انرژی شارژ شده و در ساعات پرباری با دشارژ خود، انرژی موردنیاز لوازم خانگی را فراهم می کند.



شکل (۵): استراتژی بارهای پاسخگو و باتری مشترک دهم

مقادیر ضریب بار، ماکزیمم دیماند شبکه و مجموع هزینه صورت حساب مشترکین در دو سناریوی بررسی شده در جدول (۲) نشان داده شده است. مطابق جدول، با بکارگیری مکانیزم مدیریت انرژی پیشنهادی، ضریب بار در سناریو دوم به میزان ۲۱.۸۹٪ نسبت به سناریوی اول افزایش خواهد یافت. ماکزیمم دیماند شبکه در سناریوی دوم نسبت به سناریوی اول به میزان ۲۷.۷۲٪ کاهش یافته است. هزینه مجموع صورت حساب برق روزانه مشترکین در سناریوی دوم نسبت به حالتی که مشترکین در مکانیزم مدیریت انرژی شرکت نمی کنند؛ به میزان ۷.۶۵٪ کاهش می یابد.

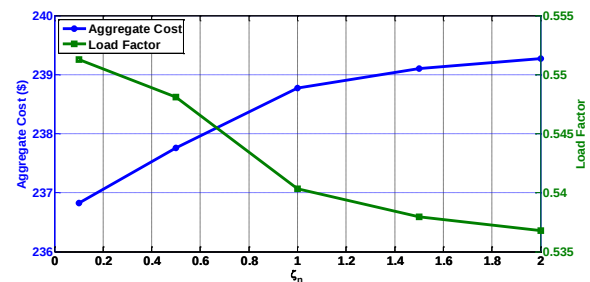
اگر چه مکانیزم مدیریت انرژی پیشنهادی، هزینه مجموع صورت حساب مشترکین را کاهش می دهد، با این حال، هر مشترک باید به اندازه کافی انگیزه برای شرکت در برنامه مدیریت انرژی داشته باشد. به

نقطه تعادل بهینه اجتماعی سیستم همگرا شده که در آن، مجموع هزینه مشترکین مینیمم و سود شرکت توزیع ماکزیمم می‌شود. با بکارگیری قید مشترک تنظیم بار ماکزیمم در مساله بهینه‌سازی مشترکین و تعرفه زمان‌واقعی توسط شرکت توزیع، ماکزیمم دیمانده شبکه کاهش، ضریب بار افزایش، و در نتیجه بهره‌برداری اقتصادی از شبکه توزیع فراهم شد. از سوی دیگر، با زمان‌بندی مناسب مصارف بارهای پاسخگو و همچنین شارژ و دشارژ باتری مشترکین، هزینه صورت‌حساب برق مشترکین کاهش یافت. شبیه‌سازی و ارزیابی عددی، نتایج تئوری را تایید کرد و نشان داده شد که سیستم مدیریت انرژی پیشنهادی در یک شبکه هوشمند واقعی قابل پیاده‌سازی می‌باشد.

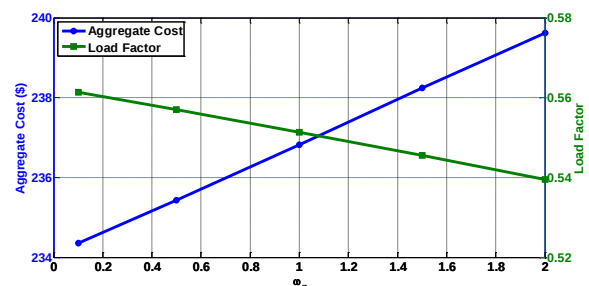
۷- مراجع

- [1] P. Palensky and D. Dietrich, "Demand Side Management: Demand Response, Intelligent Energy Systems, and Smart Loads," in IEEE Transactions on Industrial Informatics, vol. 7, pp. 381-388, 2011.
- [۲] امینیان، مهدی و جدید، شهرام، "مدیریت انرژی بهینه در ساختمان‌های هوشمند با قابلیت داد و ستد انرژی"، نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران، سال سیزدهم، شماره سوم، پاییز ۱۳۹۵.
- [3] L. Jia and L. Tong, "Dynamic Pricing and Distributed Energy Management for Demand Response," in IEEE Transactions on Smart Grid, vol. 7, no. 2, pp. 1128-1136, March 2016.
- [4] B. Chai, J. Chen, Z. Yang, "Demand Response Management with Multiple Utility Companies: A Two-Level Game Approach," in IEEE Trans. on Smart Grid, vol. 5, pp. 722-731, 2014.
- [۵] خجسته، میثم و جدید، شهرام، "مدل پاسخ بار الکتریکی مبتنی بر برنامه‌ریزی تصادفی"، نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران، سال دوازدهم، شماره اول، ۱۳-۲۱، بهار و تابستان ۱۳۹۴.
- [6] I. Atzeni, L. G. Ordóñez, G. Scutari, D. P. Palomar and J. R. Fonollosa, "Demand-Side Management via Distributed Energy Generation and Storage Optimization," in IEEE Transactions on Smart Grid, vol. 4, no. 2, pp. 866-876, June 2013.
- [۷] سلمانی، سعید و جدید، شهرام، "بهره‌برداری بهینه شبکه توزیع هوشمند در حضور منابع انرژی پراکنده"، نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران، سال سیزدهم، شماره سوم، ۱۳-۲۱، پاییز ۱۳۹۵.
- [8] H. K. Nguyen, J. B. Song and Z. Han, "Distributed Demand Side Management with Energy Storage in Smart Grid," in IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems, vol. 26, pp. 3346-3357, 2015.
- [9] A. H. Mohsenian-Rad, V. W. Wong, J. Jatskevich, R. Schober, "Autonomous Demand-Side Management Based on Game-Theoretic Energy Consumption Scheduling for the Future Smart Grid," in IEEE Trans. on Smart Grid, vol. 1, pp. 320-331, 2010.
- [10] H. Chen, Y. Li, R. H. Y. Louie, B. Vucetic, "Autonomous Demand Side Management Based on Energy Consumption Scheduling and Instantaneous Load Billing: An Aggregative Game Approach," in IEEE Trans. on Smart Grid, vol. 5, pp. 1744-1754, 2014.

می‌یابد. روند مشابهی با تغییر پارامتر ω_n برای تمامی مشترکین در تغییر مشخصه سیستم مطابق شکل (۸) مشاهده می‌شود. با توجه به این نکته که پارامتر ω_n بیانگر میزان مطلوبیت هر مشترک از استفاده انرژی الکتریکی است؛ واضح است که هرچه مقدار این پارامتر افزایش یابد، مشترک تمایل کمتری به جابجایی مصرف بار پاسخگوی خود از ساعات پرباری به ساعات کم‌باری دارد. بر همین اساس، با افزایش پارامتر مذکور، ضریب بار کاهش و هزینه مجموع صورت‌حساب برق مشترکین افزایش می‌یابد.



شکل (۷): تاثیر پارامتر ω_n بر ضریب بار و هزینه مجموع صورت‌حساب مشترکین



شکل (۸): تاثیر پارامتر ω_n بر ضریب بار و هزینه مجموع صورت‌حساب مشترکین

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مکانیزم مدیریت انرژی جامع روزپیش در چارچوب تئوری بازی برای یک شبکه هوشمند طراحی شد که در آن شرکت توزیع و مشترکین نقش دارند. برنامه مدیریت انرژی پیشنهادی در قالب بازی استکلبرگ یک رهبر - چند پیرو مدل شد که در این بازی شرکت توزیع به عنوان رهبر بازی که قیمت انرژی را تنظیم کرده و مشترکین که پیروان هستند، با دریافت قیمت، مصرف انرژی خود را تنظیم کردند. شرکت توزیع قیمت انرژی در بازار بالادست را پیش‌بینی و در چارچوب بهینه‌سازی تصادفی مبتنی بر ارزش‌ریسک، قیمت فروش انرژی به مشترکین را تعیین کرد. سیستم مدیریت انرژی هر مشترک با دریافت قیمت انرژی، استراتژی مصرف بارهای پاسخگو و شارژ و دشارژ باتری خویش را با در نظر گرفتن قید مشترک تنظیم بار ماکزیمم شبکه در چارچوب بازی عام نش با دیگر مشترکین تعیین نمود. در مقاله، اثبات شد که مکانیزم مدیریت انرژی پیشنهادی به

$$J_{I_n} F_n^t = H_n^t \quad (20)$$

$$J_{I_n} F_n^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_n^t}{\partial d_n^t \partial d_n^t} & \frac{\partial^2 f_n^t}{\partial b_n^t \partial d_n^t} \\ \frac{\partial^2 f_n^t}{\partial d_n^t \partial b_n^t} & \frac{\partial^2 f_n^t}{\partial b_n^t \partial b_n^t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به رابطه (۲۰)، ماتریس Υ_F برابر رابطه (۲۲) است [۱۵].

$$[\Upsilon_F]_{nm} \triangleq \begin{cases} \alpha_n^{\min}, & \text{if } n = m \\ -\beta_{nm}^{\max}, & \text{if } n \neq m \end{cases} \quad (21)$$

$$\alpha_n^{\min} \triangleq \inf_{I \in \mathcal{L}} \text{eigenvalue}_{\min}(J_{I_n} F_n) = \min(\{\kappa_{n,a_n}^t\}_{a_n=1}^{A_n}, \xi_n) = \sigma_n$$

$$\beta_{nm}^{\max} \triangleq \sup_{I \in \mathcal{L}} \|J_{I_m} F_n\| = \sup_{I \in \mathcal{L}} \sqrt{\text{eigenvalue}_{\max}(J_{I_m} F_n)^T (J_{I_m} F_n)} = 0$$

$$\Upsilon_F = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_N \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (22)$$

با توجه به رابطه (۲۲) و قضیه ۳ در [۱۵] مقدار C_{sm} به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$C_{sm} = \text{eigenvalue}_{\min}(\Upsilon_F) = \min(\sigma_n)_{n=1}^N, \quad (23)$$

بر اساس رابطه (۲۳)، ماتریس $\Upsilon_F - C_{sm} \mathbf{I} \succeq \mathbf{0}$ یک ماتریس قطری است که یکی از درایه‌های روی قطر برابر صفر و دیگر عناصر قطر، عددی مثبت بوده و در نتیجه این ماتریس شبه-معین مثبت است؛ پس باتوجه به قضیه ۳ در [۱۵] تابع بردار F قویا یکنوا است و بنابراین بازی عام نش مشترکین دارای یک نقطه تعادل یکتا است. ■

ضمیمه ۳: همان‌طور که در قضیه ۱ بیان شد، $\Upsilon_F \succ \mathbf{0}$ و بازی عام نش یک نقطه تعادل یکتا دارد. مطابق [۱۵]، C_{Lip} به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$C_{Lip} \triangleq \max_{I \in \mathcal{L}} \|\nabla_I L_{Peak}\|_2$$

$$\nabla_{I_n} L_{Peak}(\mathbf{I}) = \begin{cases} 0 & L_{Peak}^{\min} - L_{Peak} \leq 0 \\ [-\mathbf{1}]_{(1+A_n)} & L_{Peak}^{\min} - L_{Peak} \geq 0, t = t_{\max} \\ 0 & L_{Peak} - L_{Peak}^{\max} \leq 0 \\ [\mathbf{1}]_{(1+A_n)} & L_{Peak} - L_{Peak}^{\max} \geq 0, t = t_{\max} \end{cases}, \quad (24)$$

$$C_{Lip} = \sqrt{(N + A_1 + \dots + A_n + \dots + A_N)}$$

بر اساس قضیه ۵ در [۱۵]، رابطه $0 < \inf_v \tau^v < \sup_v \tau^v < 2 \frac{C_{sm}}{C_{Lip}^2}$ باید برقرار بوده تا دنباله $\{\lambda^{(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ توسط الگوریتم ۱ به نقطه تعادل عام نش همگرا شود. با توجه به رابطه (۲۳) و (۲۴) دنباله $\{\tau^{(v)}\}_{v=1}^{\infty}$ در رابطه (۲۵) باید صدق کرده که قضیه ۳ اثبات می‌شود.

$$0 < \inf_v \tau^v < \sup_v \tau^v < 2 \frac{\min\{\sigma_n\}_{n=1}^N}{\sqrt{(N + A_1 + \dots + A_n + \dots + A_N)}} \quad (25)$$

- [11] N. Yaagoubi and H. T. Mouftah, "User-Aware Game Theoretic Approach for Demand Management," in IEEE Transactions on Smart Grid, vol. 6, no. 2, pp. 716-725, March 2015.
- [12] S. Maharjan, Q. Zhu, Y. Zhang, S. Gjessing, T. Başar, "Demand Response Management in the Smart Grid in a Large Population Regime," in IEEE Trans. on Smart Grid, v. 7, pp. 189-199, 2016.
- [13] A. Eddahech, O. Briat, E. Woïgard "Remaining useful life prediction of lithiumbatteries in calendar ageing for automotive applications," Microelectron. Rel., vol. 52, pp. 2438-2442, 2012.
- [14] G. Scutari, D. P. Palomar, F. Facchinei, and J.-S. Pang, "Monotone games for cognitive radio systems," in Distributed Decision-Making and Control, ser. Lecture Notes Contr. Inf. Sci. Series. New York, NY, USA: Springer-Verlag Inc., 2011.
- [15] Gesualdo Scutari, Francisco Facchinei, Jong-Shi Pang, and Daniel Palomar, "Real and Complex Monotone Communication Games," IEEE Trans. on Information Theory, vol. 60, pp. 4197-4231, 2014.
- [16] Grant M and Boyd S. CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.0 beta. <http://cvxr.com/cvx>; 2013.
- [17] J. V. Paatero and P. D. Lund, "A model for generating household electricity load profiles" Int. J. En. Res., v. 30, p. 273- 290, 2006.
- [18] Boyd S, "Convex Optimization". Cambridge University Press.; 2009.

پیوست‌ها

ضمیمه ۱: با توجه به اینکه مجموعه $\bar{\mathcal{L}}_n$ پلی هدرها بوده، بنابراین یک مجموعه بسته و محدب است [۱۸]. برای بررسی تحدب تابع f_n ، ماتریس هسین آن H_n مطابق رابطه (۱۹) محاسبه می‌شود.

$$H_n^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_n^t}{\partial d_n^t \partial d_n^t} & \frac{\partial^2 f_n^t}{\partial b_n^t \partial d_n^t} \\ \frac{\partial^2 f_n^t}{\partial d_n^t \partial b_n^t} & \frac{\partial^2 f_n^t}{\partial b_n^t \partial b_n^t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{n,1}^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \kappa_{n,A_n}^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

با توجه به اینکه $\kappa_{n,a_n}^t > 0$ و $\xi_n > 0$ ، ماتریس هسین، یک ماتریس معین مثبت و در نتیجه تابع f_n ، قویا محدب است [۱۸]. از طرف دیگر با توجه به اینکه $L_{Peak}(\mathbf{I}) = \|\mathbf{I}\|_{\infty}$ یک مجموعه محدب است؛ قید اشتراک دو نیم‌صفحه محدب است و قید مشترک یک مجموعه محدب [۱۸] و مشتق پذیر بوده و لم ۱ اثبات شده؛ بنابراین بازی عام نش مشترکین معادل مساله نامساوی تغییراتی $\text{VI}(\bar{\mathcal{L}}, F)$ است. ■

ضمیمه ۲: برای بررسی نقطه تعادل بازی عام نش مشترکین و خصوصیات آن، ویژگی یکنوایی نامساوی تغییراتی $\text{VI}(\bar{\mathcal{L}}, F)$ بررسی می‌شود [۱۴]. برای این منظور، ماتریس ژاکوبین بردار تابع JF تشکیل شده و مقادیر ویژه آن بررسی می‌شود [۱۵].