

## تخمین جهت منابع با استفاده از زیرفضای ختری-رأو

سینا مجیدیان<sup>۱</sup>      فرزانه حدادی<sup>۲</sup>

۱- کارشناسی ارشد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه علم و صنعت ایران-تهران- ایران

[s\\_majidian@elec.iust.ac.ir](mailto:s_majidian@elec.iust.ac.ir)

۲- استادیار- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه علم و صنعت ایران-تهران- ایران

[farzanhaddadi@iust.ac.ir](mailto:farzanhaddadi@iust.ac.ir)

چکیده: این مقاله به بررسی تخمین جهت منابع با استفاده از آرایه خطی می‌پردازد. در حالتی که تعداد منابع بیشتر از تعداد عناصر آرایه است، روش زیرفضای ختری-رأو مختص منابع شبه‌ایستاد معرفی شده است. در این مقاله اثبات می‌شود که این روش برای منابع ایستاد نیز کارایی دارد. بحث یکتایی جواب برای مسئله تخمین جهت منابع بررسی شده و شروطی برای حالت‌های مختلف ارائه خواهد شد. علاوه بر این کران کرامر-رأو برای حالتی که تعداد منابع بیشتر از تعداد عنصر آرایه می‌باشد، محاسبه خواهد شد. همچنین نتایج حاکی از آن است که عملکرد روش ختری-رأو از نظر خطا در حدود 3dB با کران کرامر-رأو فاصله دارد.

کلمات کلیدی: پردازش سیگنال آرایه‌ای، تخمین جهت منبع، منابع ایستاد، ختری-رأو

---

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۴/۶/۱۶

تاریخ پذیرش مشروط مقاله: ۱۳۹۵/۹/۱

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۹/۲۰

نام نویسنده‌ی مسئول: دکتر فرزانه حدادی

نشانی نویسنده‌ی مسئول: ایران - تهران - نارمک-دانشگاه علم و صنعت - دانشکده مهندسی برق.

## ۱- مقدمه

یکی از کاربردهای بسیار مهم آرایه‌ای از آنتن‌ها تخمین جهت منابع می‌باشد. از دیرباز روش‌های شکل‌دهی پرتو<sup>۱</sup> و بعد از آن روش‌های مبتنی بر زیرفضا برای حل این مساله ارائه شده‌اند. برای نمونه از روش‌های شکل‌دهی پرتو می‌توان از کاپون<sup>۲</sup>، بارتلت<sup>۳</sup> نام برد. همچنین یکی از روش‌های مهم زیرفضایی میوزیک<sup>۴</sup> است. محدودیت مهم روش میوزیک حداکثر تعداد منابع قابل تخمین است [۱-۲]. این محدودیت به علت محدود بودن فضای سیگنال دریافتی به تعداد عناصر آرایه (آنتن‌ها) می‌باشد. از آنجایی که روش میوزیک به جداسازی زیرفضای سیگنال از نویز می‌پردازد، می‌بایست حداقل یک بعد فضا، سیگنال نباشد، بدین ترتیب حداکثر تعداد منابع قابل تخمین توسط این روش به  $p - 1$  می‌رسد، که  $p$  تعداد عناصر آرایه است [۲، ۱۶].

برای بهبود این محدودیت، روش ختری-رائو<sup>۵</sup> [۳]، آرایه تودرتو<sup>۶</sup> [۴]، آرایه غیرصحیح<sup>۷</sup> [۵]، آرایه پویا<sup>۸</sup> [۶]، استفاده از حسگری فشرده [۱۵، ۱۸-۲۱]، همچنین برای آرایه‌ی نسخه دوبعدی روش ختری-رائو [۱۴، ۱۷]، ارائه شده است. تمرکز این مقاله بر روش ختری-رائو است. این روش برای منابع شبه‌ایستادن معرفی شده است. در این مقاله کارایی روش برای منابع ایستادن مورد بحث قرار خواهد گرفت.

از آنجایی که عملکرد هر تخمینی را می‌توان با خطای آن سنجید، ارائه کردن کران پایینی برای خطا بسیار مفید است. کران کرامر-رائو<sup>۹</sup> (CRB) بدین منظور معرفی شده است. هرچه خطای تخمین به این کران نزدیک‌تر باشد تخمین‌گر بهتری از دید خطا خواهد بود [۷]. کران کرامر-رائو برای مساله تخمین جهت منابع انجام شده است [۸]. این محاسبه در شرایطی که تعداد منابع کمتر از تعداد عناصر آرایه است، کارایی دارد. برای برطرف کردن این محدودیت راهکاری نوین در شرایطی می‌دانیم منابع ناهمبسته هستند، ارائه خواهد شد.

مباحث ارائه شده در این مقاله به صورت مقابل است: در بخش بعدی، پژوهش‌های پیشین مرور خواهد شد. مدل مساله‌ی تخمین جهت، روش میوزیک و روش ختری-رائو ارائه می‌شود. در بخش سوم یکتایی جواب مساله تخمین جهت منبع بررسی شده و در ادامه یکتایی بر مدل ختری-رائو اعمال می‌گردد. در بخش بعدی، کارایی روش ختری-رائو برای منابع ایستادن تحلیل و اثبات شده است. در بخش پنجم کران کرامر-رائو برای این مساله معرفی و اصلاح خواهد شد. در پایان با ارائه چندین شبیه‌سازی به تحلیل عملکرد روش‌های ارائه شده می‌پردازیم.

## ۲- مبانی مساله

یک آرایه شامل  $p$  آنتن در نظر بگیرید که  $q$  جبهه موج صفحه‌ای بر آن وارد می‌شوند. پارامتر بسیار مهم برای منابع میدان‌دور جهت آن

است. منابع از جهات  $\theta_k$  که  $k = 1, \dots, q$  بر آرایه وارد می‌شوند. مدل مساله تخمین جهت منابع به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^q \mathbf{a}(\theta_k) s_k(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

که در آن  $\mathbf{a}(\theta_k)$  شامل برداری با  $p$  مقدار می‌باشد:

$$\mathbf{a}(\theta_k) = \left[ e^{2\pi i \frac{d_1}{\lambda} \sin(\theta_k)} \dots e^{2\pi i \frac{d_p}{\lambda} \sin(\theta_k)} \right]^T \quad (2)$$

که در آن  $d_p$  مکان عنصر آرایه  $p$ ام می‌باشد. همچنین با فرض

$$\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_q)]_{(p \times q)} \quad (3)$$

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_q(t)]^T \quad (4)$$

بدین ترتیب به صورت زیر می‌توان نوشت [۱]:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (5)$$

که در آن  $\mathbf{A}(\theta)$  ماتریس جاروب آرایه<sup>۱۰</sup> است. با استفاده از تعریف ماتریس همبستگی خواهیم داشت:

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_n \quad (6)$$

که در آن  $\mathbf{R}_s$  و  $\mathbf{R}_n$  به ترتیب ماتریس همبستگی منابع و نویز است. همچنین  $H$  نماد ترانزاده‌ی مزدوج مختلط است.

## ۲-۱- روش میوزیک

میوزیک یکی از متداول‌ترین روش‌ها در تخمین جهت منابع است. با استفاده از تجزیه مقدارویژه برای  $\mathbf{R}_x$  بردارویژه‌ی متناظر با  $p$  کوچکترین مقدارویژه‌ی آن به عنوان زیرفضای نویز مشخص می‌کنیم:

$$\mathbf{V}_n = [q_{q+1}, \dots, q_p] \quad (7)$$

آنگاه طیف میوزیک به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{V}_n \mathbf{V}_n^H \mathbf{a}(\theta)} \quad (8)$$

در این صورت جهت منابع DOA،  $q$  قله در طیف بالا می‌باشد.

## ۲-۲- روش ختری-رائو

در این بخش روش ختری-رائو به صورت مروری ارائه می‌گردد [۳]. منابع ناهمبسته و شبه‌ایستادن در نظر گرفته می‌شود، که به معنای ثابت بودن واریانس منبع در هر فریم می‌باشد.

$$E[|s_i(t)|^2] = r_i^{(m)} \quad (9)$$

$$t \in [(m-1)K, mK-1] \quad m = 1, \dots, M \quad (10)$$

که در آن  $s_i(t)$  سیگنال منبع  $i$  ام است.  $K$  و  $M$  به ترتیب طول فریم و تعداد فریم می‌باشد. برای فریم  $m$  ام، ماتریس همبستگی سیگنال دریافتی به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{R}_x^{(m)} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H] \in \mathbb{C}^{p \times p} \quad (11)$$

$$\forall t \in [(m-1)K, mK-1] \quad (12)$$

همچنین با استفاده از تعریف ماتریس همبستگی، داریم:

$$\mathbf{R}_x^{(m)} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s^{(m)}\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_n \quad (13)$$

که در آن  $\mathbf{R}_s^{(m)}$  ماتریس همبستگی منبع است. از آنجایی که منابع ناهمبسته فرض شده‌اند،  $\mathbf{R}_s^{(m)}$  قطری خواهد بود:

[۱۱-۱۲]. در ابتدا پژوهش مذکور مرور شده، سپس یکتایی جواب روش‌های ختری-رائو که تا کنون بررسی نشده است، محاسبه و ارائه می‌شود.

### ۳-۱- تئوری

مدل ارائه شده در (۵) را می‌توان به صورت ماتریسی نیز نشان داد:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (25)$$

که در آن

$$\mathbf{A}(\theta) = [a(\theta_1), \dots, a(\theta_q)]_{(p \times q)} \quad (26)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_q]^T \quad (27)$$

ابتدا فرض می‌کنیم

$$\eta = \text{rank}\{\mathbf{S}\} \quad (28)$$

پس

$$\text{rank}\{\mathbf{S}\mathbf{S}^H\} = \eta \quad (29)$$

**قضیه ۱:** (برای هر مجموعه داده) یک آرایه می‌تواند تا  $q$  منبع را به طور یکتا تخمین بزند اگر [۱۰]:

$$q < \frac{\eta + p}{2} \quad (30)$$

**قضیه ۲:** (برای تقریباً هر مجموعه داده) یک آرایه می‌تواند تا  $q$  منبع را به طور یکتا تخمین بزند اگر [۱۰]:

$$q < \frac{2\eta}{2\eta + 1} p \quad (31)$$

### ۳-۲- یکتایی روش ختری-رائو برای هر مجموعه

داده

یکی از نوآوری‌های این پژوهش محاسبه شرایط یکتایی جواب مسئله ختری-رائو می‌باشد. در این بخش شرایطی که در آن جواب مسئله برای هر مجموعه از داده یکتا می‌باشد، مطرح می‌کنیم. از آنجایی که تصویر تأثیری بر مساله یکتایی ندارد، از آن صرف نظر می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^* \odot \mathbf{A} \quad (32)$$

برای سیگنال دریافتی، جهت منبع یکتا خواهد بود، اگر داشته باشیم:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}(\theta)\boldsymbol{\psi} = \mathbf{B}(\theta')\boldsymbol{\psi}' \quad (33)$$

و به طور معادل

$$[\mathbf{B}(\theta) \quad \mathbf{B}(\theta')] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ -\boldsymbol{\psi}' \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (34)$$

برای برقراری این می‌بایست:

$$\zeta = \text{null}[\mathbf{B}(\theta)\mathbf{B}'(\theta)] < V = \text{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ -\boldsymbol{\psi}' \end{bmatrix} \quad (35)$$

از آنجایی که

$$V \geq \eta = \text{rank}[\boldsymbol{\psi}] \quad (36)$$

آنگاه کافی است که  $\zeta < \eta$ .

اکنون دو افزاز برای  $d$  وابسته به تعداد تکرار جهت مساوی در دو دسته جواب در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{R}_s^{(m)} = \text{diag}(r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots, r_q^{(m)}) \quad (14)$$

ماتریس همبستگی به صورت زیر برای هر فریم ستونی سازی<sup>۱۱</sup> می‌شود:

$$\mathbf{y}_m \triangleq \text{vec}(\mathbf{R}_x^{(m)}) = \text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{R}_s^{(m)}\mathbf{A}^H) + \text{vec}(\mathbf{R}_n) \quad (15)$$

حال از خواص ضرب ختری-رائو استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{y}_m = (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A})\mathbf{r}_m + \text{vec}(\mathbf{R}_n) \quad (16)$$

که در آن  $\odot$  و  $(\cdot)^*$  به ترتیب نماد مزدوج مختلط و ضرب ختری-رائو می‌باشند.  $\mathbf{r}_m$  عناصر قطری ماتریس همبستگی منبع هستند:

$$\mathbf{r}_m = [r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots, r_q^{(m)}]^T \quad (17)$$

حال با کنار هم گذاشتن  $\mathbf{y}_m$  برای  $m = 1, \dots, M$   $\mathbf{Y}$  تشکیل می‌شود:

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M] \quad (18)$$

به سادگی نشان داده می‌شود که  $\mathbf{Y}$  را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A})\boldsymbol{\psi} + \text{vec}(\mathbf{R}_n)\mathbf{1}_M^T \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\psi} = [\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M] = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{q1} & \dots & r_{qM} \end{bmatrix} \quad (20)$$

که در آن  $\mathbf{1}_M^T$  ستونی از یک، به تعداد  $M$  می‌باشد. به علت شبه‌ایستادن بودن منابع،  $[\boldsymbol{\psi}\mathbf{1}_M^T]$  رتبه کامل است. در این شرایط از تصویر<sup>۱۲</sup> می‌توان برای حذف نویز استفاده کرد:

$$\mathbf{P}^\perp = \mathbf{I}_M - \frac{1}{M}\mathbf{1}_M\mathbf{1}_M^T \quad (21)$$

خواهیم داشت:

$$\mathbf{Y}\mathbf{P}^\perp = [(\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A})\boldsymbol{\psi} + \text{vec}(\mathbf{R}_n)\mathbf{1}_M^T]\mathbf{P}^\perp = (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A})(\mathbf{P}^\perp\boldsymbol{\psi}^T)^T \quad (22)$$

حال برای  $\mathbf{Y}\mathbf{P}^\perp$  تجزیه مقدار تکین<sup>۱۳</sup> انجام داده تا برای تخمین جهت منبع از میوزیک استفاده شود:

$$\mathbf{Y}\mathbf{P}^\perp = [\mathbf{U}_s\mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \Sigma_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{V}_n^H \end{bmatrix} \quad (23)$$

که در آن عناصر روی قطر  $\Sigma_s$  مقادیر ویژه،  $\mathbf{U}_n$  و  $\mathbf{V}_n^H$  بردارویژه راست و چپ مربوط به مقادیر ویژه صفر هستند. با استفاده از رابطه ذیل می‌توان تخمین جهت را انجام داد [۳]:

$$\mathbf{U}_n^H(\mathbf{a}^*(\theta) \otimes \mathbf{a}(\theta)) = 0 \quad (24)$$

### ۳- یکتایی در مساله تخمین جهت منبع

بحث مهم در تخمین جهت منبع با استفاده از پردازش آرایه‌ای، یکتایی جواب می‌باشد. در واقع هدف یافتن شرایطی است که در آن بتوان به صورت یکتا جهت منابع را تخمین زد. این مساله برای آرایه‌ی خطی یکنواخت توسط برسلر<sup>۱۴</sup> مورد بررسی قرار گرفته بود [۹]. در سال ۱۹۸۹ وکس و زسکیند<sup>۱۵</sup> برای هر نوع آرایه‌ای شرایط کافی یکتایی را ارائه کرده‌اند [۱۰].

این مساله در سه حالت مختلف شامل: یکتایی برای هر مجموعه داده<sup>۱۶</sup>، تقریباً هر مجموعه داده<sup>۱۷</sup> و حالت مشروط ارائه شده است

$$\text{حالت دو: } d > 2q - (2p - 1) \quad (52)$$

$$\dim D(\theta, \theta') = 2d\eta$$

بنابراین

$$\dim D(\theta) \leq 2d\eta + q \quad (53)$$

پس برای

$$\dim D(\theta) < \dim Y(\theta) \quad (54)$$

می‌بایست:

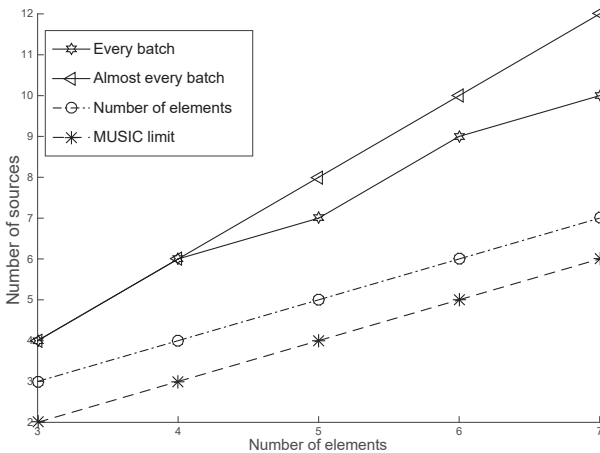
$$q < \frac{2\eta}{2\eta + 1}(2p - 1) \quad (55)$$

توضیح ۱. می‌دانیم  $\eta \geq 1$  پس نامساوی آخر فشرده‌تر است.

توضیح ۲. با برقرار بودن رابطه‌ی آخر نتیجه می‌شود که منابع می‌توانند با احتمال یک به طور یکتا تخمین زده شوند.

توضیح ۳. از آنجایی که  $\eta \leq q$  است، حداکثر تعداد منابع قابل تخمین به طور یکتا برابر  $2p - 2$  خواهد بود.

توضیح ۴. از آنجایی که "مجموعه هر داده" سخت‌گیرانه‌تر از "تقریباً هر مجموعه داده" است، شروط به دست آمده متناظر نیز بدین گونه است. (رابطه (۴۰) و (۵۵) و همچنین شکل (۱) مشاهده نمایید). به جز حالت مرزی  $\eta = q$  که به نتیجه یکسان منجر می‌شود.



شکل (۱): نمودار تعداد منابع قابل تخمین به صورت یکتا در مقایسه با تعداد عناصر آرایه. در حدود دوبرابر تعداد عناصر آرایه، جهت منبع به صورت یکتا قابل محاسبه است

### ۳-۴- یکتایی روش ختری-رائو برای داده های

#### مشروط

در این قسمت فرض می‌کنیم محدودیتی به صورت زیر بر سیگنال باشد:

$$f_j(E|s_k(t_i)|^2, \lambda_j^\mu) = 0 \quad (56)$$

$$k = 1, \dots, q \text{ and } j = 1, \dots, J \quad (57)$$

که در آن  $E|s_k(t_i)|^2$  ممان مرتبه دوم منبع  $k$ ام در زمان  $t_i$  است.  $f_j$  یک نگاشت از صفحه‌ی مختلط به خط حقیقی است.  $\lambda_j^\mu$  یک بردار از پارامترها با  $\mu$  پارامتر حقیقی است [۱۱]. در واقع این شرایط

$$d = \# \text{ pair}\{\theta_i = \theta_j\} \quad (37)$$

$$\text{حالت یک: } d < 2q - (2p - 1)$$

از آنجایی که

$$\zeta = 2q - \text{rank}[B(\theta) \ B(\theta')] \quad (38)$$

و  $\text{rank}[B(\theta)]$  برابر حداقل ابعاد آن یعنی  $\{q, 2p - 1\}$  است. داریم

$$\zeta = 2q - \min\{2p - 1, 2q - d\} \quad (39)$$

پس برای برقرار بودن  $\zeta < \eta$  باید داشته باشیم:

$$q < \frac{\eta + 2p - 1}{2} \quad (40)$$

$$\text{حالت دو: } d > 2q - (2p - 1)$$

در ابتدا ستون مربوط به جهت‌های مساوی  $\theta_i = \theta_j$  را حذف نموده و آن را  $\bar{B}$  می‌نامیم

$$\zeta = (2q - d) - \text{rank}[\bar{B}(\theta)\bar{B}(\theta')] = 0 \quad (41)$$

از آنجایی که  $V > 0$ ، پس همواره  $\zeta < V$ .

### ۳-۳- یکتایی روش ختری-رائو برای تقریباً هر

#### مجموعه داده

حال یکتایی را برای هر مجموعه داده‌ی  $Y$  به جز مجموعه‌ای با احتمال صفر بررسی می‌کنیم. مجموعه‌ی محدود شده از ماتریس  $Y$  را در نظر بگیرد:

$$Y(\theta) = \{Y|Y = B(\theta)\psi\} \quad (42)$$

فرض می‌کنیم  $\theta$  و  $\theta'$  دو مجموعه جواب باشند. حال تعریف می‌کنیم:

$$D(\theta) = \cup_{\theta'} D(\theta, \theta') \quad (43)$$

که در آن

$$D(\theta, \theta') = \{Y|Y = B(\theta)\psi = B(\theta')\psi'\} \quad (44)$$

از آنجایی که  $\text{rank}(Y) = \eta$  و هر ستون آن گسترش‌یاز  $B(\theta)$  با رتبه  $2p - 1$  است. بنابراین برای توصیف  $Y$  به  $\eta(2p - 1)$  پارامتر مختلط نیاز داریم. پس

$$\dim Y(\theta) = 2(2p - 1)\eta \quad (45)$$

$$\dim D(\theta, \theta') = 2\eta \zeta \quad (46)$$

سپس دو حالت در نظر می‌گیریم.

$$\text{حالت اول: } d < 2q - (2p - 1)$$

از آنجایی که

$$\zeta = 2q - (2p - 1) \quad (47)$$

پس داریم:

$$\dim D(\theta, \theta') = 2(2q - (2p - 1))\eta \quad (48)$$

$$\dim(\theta') = q$$

$$\dim D(\theta) \leq 2(2q - (2p - 1))\eta + q \quad (49)$$

حال برای

$$\dim D(\theta) < \dim Y(\theta) \quad (50)$$

باید داشته باشیم:

$$q < \frac{4\eta}{4\eta + 1}(2p - 1) \quad (51)$$

$$\dim D(\theta) < -J(\eta - \mu) + q \quad (70)$$

پس می توان با  $\eta > 1$  داشته باشیم:

$$\dim D(\theta) < \dim D \quad (71)$$

### ۳-۵- توصیف دیگری برای داده های مشروط

این بخش با الهام از [۱۲] توصیف دیگری برای یکتایی جواب برای مسأله خودمان ارائه می دهیم. از آنجایی که  $\psi$  توسط  $q\eta$  پارامتر حقیقی توصیف می شود، تعداد پارامتر آزاد بعد از اعمال شرط به  $J(\eta - \mu)$  کاهش می یابد. از آنجایی که  $\psi$  ناشی از  $q$  تا منبع است، بعد مجموعه محدود شده به شرط برابر  $q\mu + q - J(\eta - \mu)$  خواهد شد.

$$C \triangleq B(\theta)\psi = B(\theta')\psi' \quad (72)$$

مجموعه تکراری به صورت زیر تعریف می شود:

$$D = \{ B(\theta)\psi : C = 0 \text{ constrained} \} \quad (73)$$

همچنین  $\psi$  با  $B(\theta)$  تعداد  $2q\eta + q$  پارامتر مختلط توصیف می شود. با اعمال شرط به تعداد  $2(2p - 1)\eta$  و  $J(\eta - \mu)$  کاسته می شود. بنابراین

$$\dim = 2(2q\eta + q) - 2(2p - 1)\eta - J(\eta - \mu) \quad (74)$$

خواهد شد. برای یکتایی پاسخ، بعد مجموعه تکراری، باید کمتر از ابعاد مجموعه محدود شده باشد. که به معنای

$$2(2q\eta + q) - 2(2p - 1)\eta - J(\eta - \mu) < q\eta + q - J(\eta - \mu) \quad (75)$$

می باشد، که به همان رابطه ارائه شده منتج می شود.

### ۴- بسط روش ختری-رئو برای منابع ایستان

همانطور که گفته شد روش ختری-رئو برای منابع شبه ایستان معرفی شده است [۳]. در این بخش کارایی این روش برای منابع ایستان به طور مختصر تبیین می شود. همانند منابع شبه ایستان، در هر فریم تخمینی از ماتریس همبستگی محاسبه می شود. سپس با ستونی سازی آن  $\mathbf{y}_m$  به دست می آید. حال  $\mathbf{y}_m$  مربوط به هر فریم به عنوان ستون ماتریس  $\mathbf{Y}$  قرار می دهیم.

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M] \quad (76)$$

بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{A}^* \odot \mathbf{A})\psi + \sigma^2 \text{vec}(\mathbf{I})\mathbf{1}_M^T \quad (77)$$

که در آن ستون های  $\psi$  تخمین هایی از همبستگی منبع در فریم های مختلف می باشند. اکنون اگر بتوانیم نشان دهیم  $\mathbf{Q} = [\psi \mathbf{1}_M^T]$  رتبه ستونی آن کامل است، می توان مولفه نویز را حذف کرد و مانند منابع شبه ایستان جهت منابع را تخمین زد.

قضیه ۳: هنگامی که  $\mathbf{1}_M^T$  ستونی از یک، به تعداد  $M$  بوده  $\psi$  ارائه شده در بحث فوق باشد،  $\mathbf{Q} = [\psi \mathbf{1}_M^T]$  یک ماتریس رتبه ستونی کامل با احتمال یک است.

اثبات این قضیه در پیوست یک آورده شده است.

محدودیتی بر روابط بین واریانس منابع قرار می دهد. که کاربردی مثل محدودیت توان می تواند مثال آن باشد. برای  $J = 1$  و  $\mu = 1$  خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^q E|s_k(t_i)|^2 - P = 0 \quad (58)$$

تعداد پارامتر آزاد برای توصیف  $B(\theta)$  برابر  $2p - 1$  می باشد. بردار معادل منبع  $\psi$  که یک ماتریس حقیقی  $q \times M$  با رتبه  $\eta$  است، توسط  $q\eta$  پارامتر حقیقی توصیف می شود.

مجموعه همه بردار  $\psi$  که در شرایط فوق صدق می کند را با  $D$  نشان می دهیم. به خاطر شرط تعداد پارامتر آزاد به مقدار  $J(\eta - \mu)$  کاهش می یابد. بنابراین

$$\dim D = q\eta - J(\eta - \mu) \quad (59)$$

مجموعه جواب های تکراری همچون قسمت قبل تعریف می شود:

$$D(\theta) = U_{\theta'} \quad (60)$$

برای یکتایی کافی است، که بعد مجموعه  $D(\theta)$  کمتر از بعد  $D$  باشد. حال دو حالت را در نظر می گیریم:

$$\text{حالت یک: } d < 2q - (2p - 1)$$

از آنجایی که

$$\zeta = \text{null}[B(\theta) \ B(\theta')] \quad (61)$$

و

$$\text{rank}[B(\theta)B(\theta')] = \min\{2p - 1, 2q - d\} \quad (62)$$

پس

$$\zeta = 2q - (2p - 1) \quad (63)$$

بنابراین به تعداد  $2(2q - (2p - 1))$  پارامتر حقیقی برای هر بردار درون  $\text{null}[B(\theta) \ B(\theta')]$  و تعداد  $2(2q - (2p - 1))\eta$

برای توصیف ماتریس با رتبه  $\eta$  نیاز است. بنابراین

$$\dim D(\theta, \theta') = 2(2q - (2p - 1))\eta - J(\eta - \mu) \quad (64)$$

پس

$$\dim D(\theta) = 2(2q - (2p - 1))\eta - J(\eta - \mu) + q \quad (65)$$

برای اینکه

$$\dim D(\theta) < \dim D \quad (66)$$

برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$q < \frac{2\eta}{3\eta + 1} (2p - 1) \quad (67)$$

همان طور که دیده می شود، اثر تعداد پارامترهای شرط اثر یکسانی بر بعد  $D$  و  $\dim D(\theta)$  دارد، پس در رابطه کلی بی تأثیر خواهد بود.

$$\text{حالت دو: } d > 2q - (2p - 1)$$

همانند بخش قبل با حذف ستون تکراری خواهیم داشت:

$$\zeta = (2q - d) - \text{Rank}[\bar{B}(\theta)\bar{B}(\theta')] = 0 \quad (68)$$

و

$$\dim D(\theta, \theta') = 0 - J(\eta - \mu) \quad (69)$$

بنابراین

## ۵- کران کرامر-رئو CRB

معیار بسیار مهم برای سنجش عملکرد یک تخمین گر خطای آن است. کم بودن خطای تخمین گر حاکی از عملکرد مناسب آن است. بدین صورت می‌خواهیم خطا را حداقل نماییم، اما بعضی مواقع نمی‌توانیم به صفر برسیم. با این حال اگر بتوانیم مقدار حداقل خطای ممکن را محاسبه نماییم، قدم بسیار مهمی را برداشته‌ایم. بدین منظور کران کرامر-رئو ارائه شده است. بدین صورت که ابتدا خطای تخمین گر پیشنهادی ناریب<sup>۱۸</sup> (برابر بودن امید مقدار تخمین زده شده با مقدار صحیح آن) را محاسبه کرده، سپس آن را با کران کرامر-رئو مقایسه می‌نماییم. اگر تخمین گر مورد نظر به این کران برسد، بهترین تخمین گر ممکن از دید حداقل خطا را ارائه کرده‌ایم [۷].

قضیه ۴: برای چگالی احتمال  $P(x; \alpha)$  اگر شرط عادی بودن<sup>۱۹</sup> به صورت

$$E \left[ \frac{\partial \ln p(x; \alpha)}{\partial \alpha} \right] = 0 \quad (78)$$

برقرار باشد. مقدار خطای تخمین گر ناریب در شرط زیر صدق می‌کند [۷]:

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \text{FIM}^{-1} \quad (79)$$

$$\text{FIM} = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(x; \alpha)}{\partial \alpha^2} \right] \quad (80)$$

که در آن FIM و  $\alpha$  به ترتیب ماتریس اطلاعات فیشر و بردار مجهول می‌باشد.

در مساله تخمین جهت منابع، برای محاسبه کران کرامر-رئو تلاش های بسیاری شده است. ابتدا ۱۹۹۰ استویکا<sup>۲۰</sup> و همکاران [۱۳] به جای محاسبه مستقیم کران کرامر-رئو، واریانس خطای تخمین گر حداکثر درست‌نمایی را محاسبه کرده‌اند که به صورت مجانبی برابر با کران است. ده سال بعد در [۸] محاسبه مستقیم انجام شده است. اما تعداد منابع کمتر از تعداد عناصر آرایه فرض شده است. یکی از نوآوری‌های این پژوهش محاسبه کران کرامر-رئو برای تعداد منابع بیشتر از تعداد عنصر آرایه می‌باشد. ابتدا در ادامه، نتایج مقاله‌ی مذکور که برای تعداد منابع کمتر از تعداد عنصر آرایه مناسب است، مرور می‌شود.

## ۵-۱- کرامر-رئو برای تعداد منابع کمتر از تعداد عنصر آرایه

همانطور که اشاره شد برای ماتریس همبستگی سیگنال دریافتی داریم:

$$R_x = AR_s A^H + \sigma^2 I \quad (81)$$

در این مساله بردار مجهول به صورت زیر است:

$$\alpha = [\theta^T \rho^T \quad \sigma]^T \quad (82)$$

که در آن

$$\theta = [\theta_1, \dots, \theta_q]^T \quad (83)$$

جهت منبع به تعداد  $q$  تا می‌باشد.  $\sigma$  جذر واریانس نویز می‌باشد. همچنین  $\rho$  یک بردار شامل عناصر روی قطر، قسمت حقیقی و موهومی عناصر بالا مثلثی ماتریس همبستگی منبع است. این بدان علت است که ساختار ماتریس همبستگی به صورت هرمیتی<sup>۲۱</sup> است. پس

$$\rho: \{R_s^{(i,i)}, \text{Re}(R_s^{(i,j)}), \text{Im}(R_s^{(i,j)})\} \quad (84)$$

$$\text{for } i, j = 1, \dots, q, j > i \quad (85)$$

در [7] آمده است که برای سیگنال گوسی با ماتریس همبستگی  $R_x$  ماتریس اطلاعات فیشر به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{FIM}_{i,j} = N \text{Tr} \left( \frac{dR_x}{d\alpha_i} R_x^{-1} \frac{dR_x}{d\alpha_j} R_x^{-1} \right) \quad (86)$$

$$\text{for } i, j = 1, \dots, q^2 + q + 1 \quad (87)$$

که در آن  $N$  تعداد نمونه‌ها می‌باشد.

قضیه ۵: کران کرامر-رئو برای تخمین جهت منابع به صورت زیر می‌باشد [۸]:

$$\text{CRB}(\theta) = \frac{\sigma}{2N} \text{Re} \{ (D^* \Pi_A^\perp D) \odot (R_s A^* R_x^{-1} A R_s) \}^{-1} \quad (88)$$

که در آن

$$D = [d_1, \dots, d_q] \quad (89)$$

$$d_i = \frac{d\alpha(\theta_i)}{d\theta_i} \quad (90)$$

و همچنین

$$\Pi_A^\perp = I - \Pi_A \quad (91)$$

$$\Pi_A = A(A^* A)^{-1} A^* \quad (92)$$

## ۵.۲. کران کرامر-رئو برای منابع ناهمبسته بیشتر از

### تعداد عنصر آرایه

در این بخش محاسبه کران کرامر-رئو برای منابع ناهمبسته به تعداد بیشتری از تعداد عنصر آرایه مدنظر است. فرض کنیم، می‌دانیم منابع ناهمبسته هستند، دیگر نیازی به تخمین عناصر غیرقطری ماتریس همبستگی منبع نیست و آن را پیش فرض صفر در نظر می‌گیریم. در این صورت بردار مجهول به صورت زیر است:

$$\alpha = [\theta^T \rho^T \quad \sigma]^T \quad (93)$$

که در آن

$$\theta = [\theta_1, \dots, \theta_q]^T \quad (94)$$

جهت منبع به تعداد  $q$  تا می‌باشد.  $\sigma$  جذر واریانس نویز می‌باشد. همچنین  $\rho$  یک بردار شامل فقط عناصر روی قطر ماتریس همبستگی منبع است. پس

$$\rho: [R_s^{(1,1)}, \dots, R_s^{(q,q)}]^T \quad (95)$$

با استفاده از رابطه (۹۲) و خواص ستونی‌سازی داریم:

همچنین

$$\frac{d\text{vec}(\mathbf{R}_x)}{d\boldsymbol{\rho}^T} = (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{J}) \quad (108)$$

که در آن  $\mathbf{J}$  یک ماتریس  $q \times p^2$  است. برای سطر  $i$  ام آن همه درایه های آن صفر است به جز درایه ی  $(i(q+1)+1)$  ام که یک می باشد.

درواقع از یک ماتریس همبستگی که روی قطر آن مقدار دارد، هر بار نسبت به یک درایه مشتق می گیریم. می دانیم مشتق آن درایه نسبت به خود یک است و نسبت به بقیه درایه ها صفر خواهد بود. در ادامه آن را ستونی می کنیم و به عنوان یک ستون از ماتریس  $\mathbf{J}$  قرار خواهیم داد. بدین ترتیب  $\mathbf{V}$  محاسبه خواهد شد. در مرحله آخر محاسبه  $\mathbf{u}$  به صورت زیر است:

$$\mathbf{u} = \left( \mathbf{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \mathbf{R}_x^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{d\mathbf{r}}{d\boldsymbol{\rho}^T} \\ = \left( \mathbf{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \mathbf{R}_x^{-\frac{1}{2}} \right) \text{vec}(\mathbf{I}) = \text{vec}(\mathbf{R}_x^{-1}) \quad (109)$$

بدین ترتیب تمام اجزای ماتریس اطلاعات فیشر تکمیل شد. با معکوس بلوکی ارائه شده و ساده سازی کران کرامر-رائو برای به دست آمدن تفاوت عمده ای که محاسبات انجام شده در این بخش با مرجع دارد از آنجایی ناشی می شود که در حین محاسبه کران نیاز به  $(\Delta^H \Delta)^{-1}$  داشتیم. ابعاد  $\Delta$  برابر  $p^2 \times (q^2 + 1)$  بود. در حالتی که تعداد منابع کمتر از تعداد عنصر آرایه باشد، این ماتریس رتبه کامل ستونی می شود، آنگاه  $\Delta^H \Delta$  معکوس پذیر خواهد بود. اما هنگامی که تعداد منابع بیشتر از تعداد عنصر آرایه باشد، رتبه این ماتریس برابر تعداد سطر آن می شود، آنگاه  $\Delta^H \Delta$  ماتریس مربعی رتبه کامل نیست و نمی توان از آن معکوس گرفت. با این حال با فرض دانستن اینکه منابع ناهمبسته هستند به ما کمک کرد تا ابعاد  $\Delta$  برابر  $p^2 \times (q+1)$  شود و سپس  $\Delta^H \Delta$  معکوس پذیر شود.

## ۶- شبیه سازی

یک آرایه ی خطی سه عنصری در نظر گرفته شده است. چهار منبع ایستان گوسی ناهمبسته از جهات  $\theta = \{10^\circ, 30^\circ, 55^\circ, 80^\circ\}$  به این آرایه وارد می شوند. SNR=20dB است. الگوریتم میوزیک و الگوریتم ختری-رائو برای این شرایط با استفاده از نرم افزار متلب ۲۲ شبیه سازی شده است. طیف این دو الگوریتم در شکل (۲) رسم شده است.

همانطور که در شکل دیده می شود روش ختری-رائو به خوبی توانسته است جهات منابع ایستان را تخمین بزند که حاکی از درستی تحلیل ارائه شده در بخش های قبل می باشد. شایان ذکر است که روش میوزیک به دلیل محدودیت ذاتی خود زیر فضای نویزی ندارد و تخمین غلطی ارائه داده است.

$$\frac{1}{N} \text{FIM}_{i,j} = \text{vec} \left( \frac{d\mathbf{R}_x}{d\alpha_i} \right)^* (\mathbf{R}_x^{-T} \otimes \mathbf{R}_x^{-1}) \text{vec} \left( \frac{d\mathbf{R}_x}{d\alpha_j} \right) \quad (96)$$

و به طور معادل

$$\frac{1}{N} \text{FIM} = \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\boldsymbol{\alpha}^T} \right)^* (\mathbf{R}_x^{-T} \otimes \mathbf{R}_x^{-1}) \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\boldsymbol{\alpha}^T} \right) \quad (97)$$

که در آن

$$\mathbf{r} = \text{vec}(\mathbf{R}_x) = (\mathbf{A}^* \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{R}_s) + \sigma^2 \text{vec}(\mathbf{I}) \quad (98)$$

می توانیم به دو بخش جدا کنیم:

$$\left( \mathbf{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \mathbf{R}_x^{-\frac{1}{2}} \right) \left[ \frac{d\mathbf{r}}{d\boldsymbol{\theta}^T} \mid \frac{d\mathbf{r}}{d\boldsymbol{\rho}^T} \frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\boldsymbol{\sigma}} \right] \\ \triangleq [\mathbf{G} \mid \Delta] \quad (99)$$

بنابراین

$$\frac{1}{N} \text{FIM} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^H \\ \Delta^H \end{bmatrix} [\mathbf{G} \mid \Delta] = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^H \mathbf{G} & \mathbf{G}^H \Delta \\ \Delta^H \mathbf{G} & \Delta^H \Delta \end{bmatrix} \quad (100)$$

از آنجایی که ما به دنبال کران کرامر-رائو برای مساله تخمین جهت منابع هستیم، فقط معکوس بلوک اول در ماتریس اطلاعات فیشر برآیمان کافی است. با استفاده از رابطه اول قضیه معکوس ماتریس بلوکی

$$\text{CRB}(\boldsymbol{\theta}) \\ = \frac{1}{N} (\mathbf{G}^H \mathbf{G} - \mathbf{G}^H \Delta (\Delta^H \Delta)^{-1} \Delta^H \mathbf{G})^{-1} \quad (101)$$

حال  $\Delta$  به دو بخش جدا می کنیم:

$$\Delta = \left( \mathbf{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \mathbf{R}_x^{-\frac{1}{2}} \right) \left[ \frac{d\mathbf{r}}{d\boldsymbol{\rho}^T} \mid \frac{d\mathbf{r}}{d\boldsymbol{\sigma}} \right] \\ \triangleq [\mathbf{V} \mid \mathbf{u}] \quad (102)$$

ابتدا برای محاسبه  $\mathbf{G}$  داریم:

$$\frac{d\mathbf{R}_x}{d\theta_k} = [0 \dots d_k \dots 0] \mathbf{R}_s \mathbf{A}^* + \mathbf{A} \mathbf{R}_s \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ d_k^* \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ = d_k \mathbf{c}_k^* \mathbf{A}^* + \mathbf{A} \mathbf{c}_k d_k^* \quad (103)$$

که در آن  $\mathbf{c}_k$  ستون  $k$  ام از ماتریس  $\mathbf{R}_s$  است. حال ستون  $k$  ام از  $\mathbf{G}$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{g}_k = \left( \mathbf{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \mathbf{R}_x^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{d\mathbf{r}}{d\theta_k} = \\ \left( \mathbf{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \mathbf{R}_x^{-\frac{1}{2}} \right) \text{vec} \left( \frac{d\mathbf{R}_x}{d\theta_k} \right) \quad (104)$$

که به طور معادل

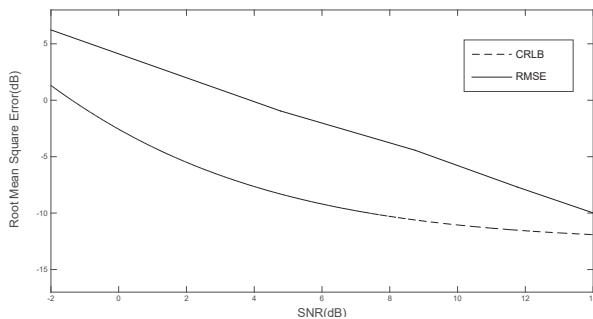
$$\mathbf{g}_k = \text{vec} \left( \mathbf{R}_x^{-\frac{1}{2}} \frac{d\mathbf{R}_x}{d\theta_k} \mathbf{R}_x^{-\frac{1}{2}} \right) \\ = \text{vec}(\mathbf{Z}_k + \mathbf{Z}_k^*) \quad (105)$$

که در آن

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{R}_x^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{c}_k d_k^* \mathbf{R}_x^{-\frac{1}{2}} \quad (106)$$

محاسبه  $\mathbf{V}$ : طبق تعریف داشتیم:

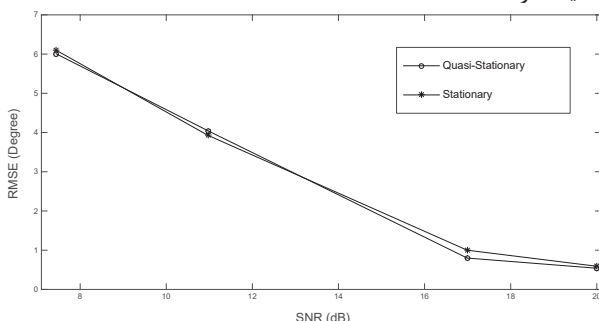
$$\mathbf{V} = \left( \mathbf{R}_x^{-\frac{T}{2}} \otimes \mathbf{R}_x^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{d\mathbf{r}}{d\boldsymbol{\rho}^T} \quad (107)$$



شکل (۴): مقایسه RMSE و کران کرامر-رائو برای روش ختری-رائو. نزدیکی این خطا به کران حاکی از عملکرد مناسب روش است

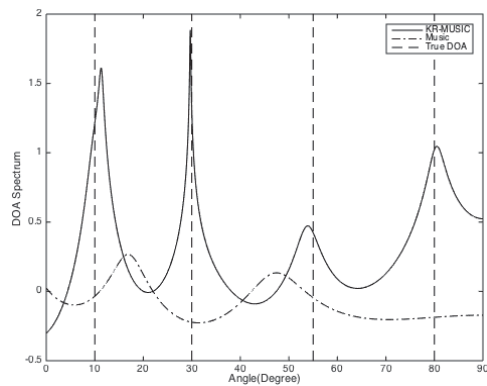
از شکل (۴) استنباط می‌شود که خطای تخمین روش ختری-رائو تا حدود 5dB به کران کرامر-رائو نزدیک است.

در شبیه‌سازی بعدی، خطای تخمین با استفاده از روش ختری-رائو برای منبع ایستان و شبه‌ایستان برحسب SNR مقایسه می‌شود. چهار منبع در همان جهات در نظر گرفته شده است. تخمین جهت با استفاده از ده فریم با طول ۳۰ نمونه انجام شده است. همانطور که ذکر شد، روش ختری-رائو برای منابع شبه‌ایستان معرفی شده بود، در این مقاله کارایی روش مذکور برای منابع ایستان به تایید رسید. بدین-ترتیب با توجه به شکل (۵) که خطای تخمین در این دو حالت مقایسه شده است، از بسیار نزدیک بودن خطا برای منبع ایستان و شبه‌ایستان حکایت دارد.



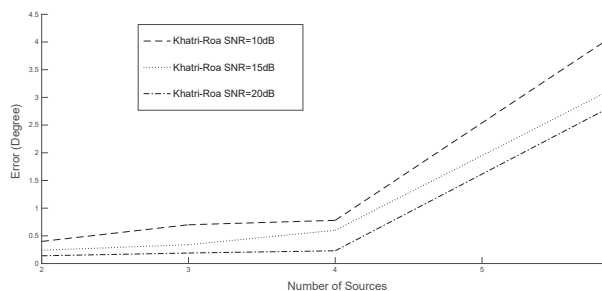
شکل (۵): RMSE برای روش ختری-رائو برای دو منبع ایستان و شبه-ایستان مقایسه شده است. روش مذکور برای منابع ایستان نیز تخمین مناسبی مثل منابع شبه‌ایستان ارائه می‌کند

همچنین در این حالت توزیع مقدارویژه‌های داده‌های دریافتی در عناصر آرایه برای منبع ایستان و شبه‌ایستان در شکل (۶) رسم شده است. با توجه به این که چهار منبع داریم، چهار مقدارویژه بزرگ آن، متناظر با زیرفضای سیگنال و بقیه مربوط به زیرفضای نویز هستند. بدین ترتیب با توجه به شکل (ستون ۵ و ۶ از شکل (۶) بالا (شبه-ایستان) و پایین (ایستان)) مشاهده می‌گردد که جداسازی زیرفضای سیگنال از نویز در این دو حالت تفاوتی خاصی ندارد و کارایی روش ختری-رائو برای منبع ایستان و شبه‌ایستان برقرار است.



شکل (۶): طیف روش ختری-رائو در مقایسه با میوزیک. میوزیک بر خلاف روش ختری-رائو نتوانسته است تخمین مناسبی ارائه کند

شبیه‌سازی بعدی مربوط به بررسی حداکثر تعداد منابع قابل تخمین است. بدین‌منظور خطای تخمین جهت با استفاده از روش ختری-رائو برای آرایه‌ی خطی سه عنصری برحسب تعداد منابع برای نسبت سیگنال به نویز 10dB، 15dB و 20dB در شکل (۵-۲) رسم شده است. حداکثر تعداد منابع قابل تشخیص به صورت یکتا توسط رابطه ارائه شده در بخش ۲.۳. برای  $p=3, \eta=4$  برابر  $q=4$  خواهد بود که به صورت شرط کافی به دست آمد. شکل (۳) حاکی از آن است که وقتی تعداد منابع بیشتر از حد محاسبه شده می‌شود، خطا به شدت افزایش می‌یابد.



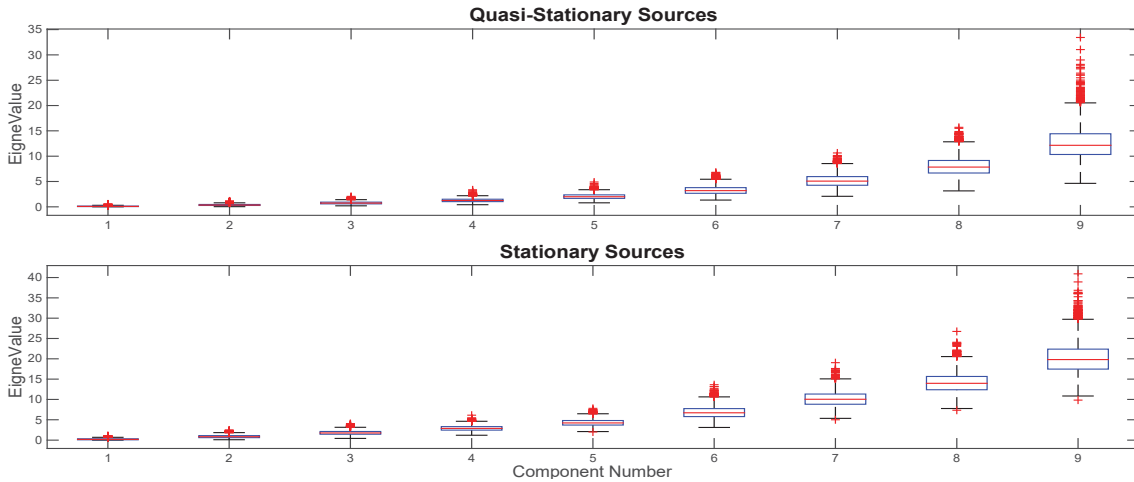
شکل (۳): مقایسه خطای روش ختری-رائو بر حسب تعداد منابع برای SNR=10,15,20dB. وقتی که تعداد منابع از حد محاسبه شده بیشتر می‌شود، خطا بسیار افزایش می‌یابد

در ادامه، خطای روش ختری-رائو در مقایسه با کران کرامر-رائو برای منابع ناهمبسته‌ی بیشتر از تعداد عنصر آرایه رسم می‌گردد. آرایه‌ی خطی با سه عنصر در نظر گرفته شده است که چهار منبع از جهات  $\theta = \{10^\circ, 30^\circ, 55^\circ, 80^\circ\}$  بر آن وارد می‌شوند. جذر میانگین مربع خطا<sup>۲۳</sup> (RMSE) به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$RMSE^2 = \frac{1}{N_M} \sum_{i=1}^{N_M} (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2 \quad (110)$$

که در آن  $N_M$  تعداد اجرای مونت-کارلو<sup>۲۴</sup> می‌باشد. در شکل زیر مقایسه میزان خطای روش ارائه شده و کران رسم شده است.





شکل (۶): مقایسه بین توزیع مقادیر ویژه داده‌ها برای دو منبع ایستان و شبه ایستان. مشاهده می‌گردد که اختلاف بین مقادیر ویژه‌های مرزی که سیگنال و نویز را جدا می‌کند (مقادیر ویژه‌ی پنجم و ششم) برای منبع ایستان نسبت به منبع شبه ایستان تفاوت چندانی با یکدیگر ندارد.

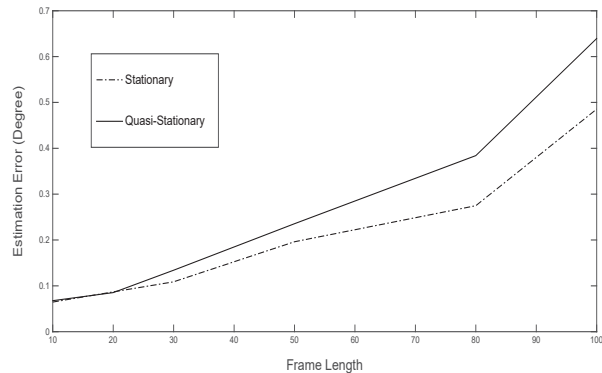
## ۷- نتیجه گیری

در این مقاله ابتدا به مرور پیشینه تحقیق تخمین جهت منابع با استفاده از آرایه‌ای از آنتن‌ها پرداخته شده است. الگوریتم ختری-رائو در سال ۲۰۱۰ برای تخمین تعداد منابع ناهمبسته بیشتر از تعداد عنصر آرایه هنگامی که منابع شبه ایستان باشد، معرفی شده بود. در این مقاله شرایطی برای یکتایی جواب مساله تخمین جهت منابع در مدل ختری-رائو بررسی شده است، که به صورت نامساوی برای تعداد منابع قابل تخمین برحسب تعداد عناصر آرایه و رتبه‌ی ماتریس همبستگی منابع ارائه شده است. بدین صورت تعداد منابع قابل تخمین برای روش ختری-رائو بیشتر از تعداد عناصر آرایه به دست آمد. همچنین اثباتی برای کارآمدی روش ختری-رائو برای منابع ایستان ارائه شده است.

در ادامه کران کرامر-رائو که حد پایینی برای خطای تخمین گر نارایب است، بررسی شد. کران ارائه شده توسط استوپکا برای تعداد منابع کمتر از تعداد عناصر قابل محاسبه بود. در این مقاله با استفاده از شرایط مساله، رابطه کران کرامر-رائو برای تعداد منابع ناهمبسته بیشتر از تعداد عنصر آرایه به دست آمد.

شبیه‌سازی‌های متعددی برای بررسی کارایی الگوریتم ارائه شدند. در ابتدا ناتوانی روش میوزیک هنگامی که تعداد منابع بیشتر از تعداد عنصر آرایه باشد، در مقایسه با کارایی روش ختری-رائو نشان داده شد. همچنین عملکرد مناسب روش برای منابع ایستان نیز مشاهده شد. علاوه بر آن خطای تخمین روش ختری-رائو با کران کرامر-رائو مقایسه شد، که تفاوتی در حدود 5dB گزارش شد. این مقدار نشان از عملکرد مناسب روش ختری-رائو برای منابع ایستان دارد. در شرایطی که تعداد نمونه‌ها ثابت است و طول فریم افزایش می‌یابد خطای تخمین برای منابع ایستان کمتر از منابع نایستان است، که این موضوع به علت ناتوانی در وفق دادن تخمین واریانس منابع با مقدار واقعی آن است.

در ادامه خطای تخمین برای دو منبع ایستان و شبه ایستان بر حسب طول فریم مقایسه شده است. تعداد نمونه‌ها  $N=1000$  و نسبت سیگنال به نویز  $SNR=10dB$  در نظر گرفته شده است. در شکل (۷) خطا بر حسب طول فریم از  $L=10$  الی  $L=100$  رسم شده است. در شکل مذکور مشاهده می‌گردد که با افزایش طول فریم، خطای روش برای هر دو نوع منبع افزایش یافته است، که به علت کاهش تعداد فریم است.



شکل (۷): مقایسه RMSE روش ختری-رائو برای منبع ایستان و شبه ایستان. با افزایش طول فریم روش برای منابع شبه ایستان بهتر عمل می‌کند

همچنین مشاهده می‌گردد که خطا برای منبع شبه ایستان بیشتر از ایستان است. این بدان علت است که برای منبع شبه ایستان که در هر فریم واریانس منابع تغییر می‌کند، با افزایش طول فریم نمی‌تواند خود را با این تغییرات همراه کند، به تبع آن منجر به تخمین نامناسب می‌شود. لازم به ذکر است که این طول فریم در محاسبه تخمین ماتریس همبستگی تاثیرگذار است که منجر به تاثیر بر تخمین جهت می‌شود. بدین ترتیب خطای تخمین برای منبع ایستان کم‌تر به دست می‌آید.

- [7] Kay S.M., Fundamentals of Statistical Signal processing: Estimation Theory, Prentice Hall. 1993.
- [8] Stoica P., Larsson E.G., Gershman A.B., "The stochastic CRB for array processing: a textbook derivation", IEEE Signal Process. Lett., vol.8, no. 5, pp. 148-150, May 2001.
- [9] Bresler Y., and Mackovski A., "On the number of signals resolvable by a uniform linear array", IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process., vol. ASSP-34, no. 6, pp. 1361-1375, Dec. 1986.
- [10] Wax M., and Ziskind I., "On unique localization of multiple sources by passive sensor arrays", IEEE Trans. Signal Process., vol. 37, no. 7, pp.996-1000, Jul. 1989.
- [11] Wax M., "On unique localization of constrained-signal sources," IEEE Trans. Signal Process., vol. 40, pp. 1542-1547, June 1992.
- [12] Valae S., and Kabal P., "Alternative Proofs for "On Unique Localization of Constrained-Signal Sources" vol. 42, no. 12, pp. 3547-3548, Dec. 1994.
- [13] Stoica P., Nehorai A., "Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process, vol. 38, no.10, pp. 1783-1795, Oct 1990
- [14] Liu Q, Ouyang S., He ZQ., "2-D DOA estimation of quasi-stationary signals based on Khatri-Rao subspace approach", IEEE International Conference (ICRIT'2011), Aug. 2011.
- [15] Chen T., Wu H., Zhao Z., "The Real-Valued Sparse Direction of Arrival (DOA) Estimation Based on the Khatri-Rao Product", Sensors. 2016 May; 16(5): 693.
- [16] Krim H. and Viberg M., "Two decades of array signal processing research, the parametric approach," IEEE Signal Process. Mag., pp. 67-94, Jul. 1996.
- [17] Zeraatkar J., Farrokhi H., Neda N., "Analyzing the effects of the transmitter and receiver antenna arrays separations on MIMO Channel capacity", Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers Vol13 No.2 Summer 2016.
- [18] Shen Q., Liu W, Cui W., Wu S., "Underdetermined DOA Estimation Under the Compressive Sensing Framework: A Review," IEEE Access, 2016.
- [19] Das A., Hodgkiss W., and Gerstoft P., "Coherent Multipath Direction-of-Arrival Resolution Using Compressed Sensing", IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2016.
- [20] Shen, Y., Jing Y., and Feng N., "Construction of deterministic sensing matrix and its application to DOA estimation." Journal of Systems Engineering and Electronics 27.1 (2016): 10-19.
- [21] Yu K, Zhang Y., Bao M.,; Hu Y., Wang Z., "DOA Estimation from One-Bit Compressed Array Data via Joint Sparse Representation", IEEE Signal Processing Letters, Sept. 2016.

### زیر نویس ها

<sup>1</sup>beam forming

<sup>2</sup>Capon

<sup>3</sup> Bartlett

<sup>4</sup>MUSIC (multiple signal classification)

<sup>5</sup>Khatri-Rao approach

<sup>6</sup>nested array

بدین ترتیب در این شرایط الگوریتم ختری-رائو برای منابع ایستادن نسبت به منابع شبه ایستادن عملکرد بهتری دارد.

### ضمایم

در این قسمت اثبات قضیه ۳ ارائه می شود. برای نشان دادن رتبه ستونی کامل بودن به احتمال یک می بایست:

$$P\{\mathbf{Q} \text{ be full column rank}\} = 1 \quad (۱)$$

$$P\{\mathbf{c}^T \mathbf{Q} = 0\} = 0 \quad (۲)$$

که در آن  $\mathbf{c}$  یک بردار با  $M+1$  درایه است. به طور معادل

$$P\left\{\sum_{i=1}^M c_i \boldsymbol{\psi}_i + c_{M+1} \mathbf{1}_M^T = 0\right\} = 0 \quad (۳)$$

که در آن  $\boldsymbol{\psi}_i$  ستونی از  $\boldsymbol{\psi}$  است. اگر نام گذاری کنیم:

$$W = \sum_{i=1}^M c_i \boldsymbol{\psi}_i \quad (۴)$$

$$k = -c_{M+1} \mathbf{1}_M^T \quad (۵)$$

به طور معادل می توان نوشت:

$$P\{W = k\} = 0 \quad (۶)$$

عدد ثابت خواهد بود. همچنین از آنجایی که منابع گوسی فرض شده اند، تخمین ماتریس همبستگی دارای توزیع ویشارت<sup>۲۵</sup> می باشد [۵]. پس ستونی شده آن ( $\boldsymbol{\psi}_i$ ) دارای توزیع ویشارت خواهد بود. از آنجایی که ترکیب خطی آن ( $W$ ) هم یک متغیر تصادفی با توزیع پیوسته است، احتمال رخ دادن رابطه فوق صفر خواهد بود. بدین ترتیب اثبات قضیه کامل است. بدین ترتیب با حذف نویز و تجزیه مقدار ویژه می توان جهت منابع را تخمین زد.

### مراجع

- [1] Atashbar M., Kahae, M., "Multi-Speakers' Direction Of Arrival Estimation Using WCSDDOA Method", Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers Vol13 No.2 Summer 2016,
- [2] Schmidt R., "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-34, No. 3, pp.276-280, Mar. 1986.
- [3] Ma W. K., Hsieh T. H., and Chi C. Y., "DOA Estimation of Quasi-Stationary Signals With Less Sensors Than Sources and Unknown Spatial Noise Covariance: A Khatri-Rao Subspace Approach", IEEE Trans. Signal Process., vol. 58, no. 4, pp. 2168-2180, Apr. 2010.
- [4] Pal P. and Vaidyanathan P.P., "Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom," IEEE Trans. Signal Process., vol. 58, no. 8, pp. 4167-4181, Aug. 2010.
- [5] Abramovich Y. I., Spencer N. K., and Gorokhov A. Y., "DOA estimation for noninteger linear Arrays with More Uncorrelated Sources than Sensors", IEEE Trans. Signal Process., vol. 48, pp. 943-955, Apr. 2000.
- [6] Ariananda D., and Leus G., "Direction of arrival estimation for more correlated sources than active sensors", Signal Process. (Elsevier), Vol.93, pp. 3435-3448, Dec. 2013.



- 
- <sup>7</sup>co-prime array
  - <sup>8</sup>dynamic array
  - <sup>9</sup>Cramer-Rao band (CRB )
  - <sup>10</sup> steering vector
  - <sup>11</sup> vectorization
  - <sup>12</sup> projection
  - <sup>13</sup> Singular Value Decomposition (SVD)
  - <sup>14</sup>Bresler
  - <sup>15</sup>Wax and Ziskind
  - <sup>16</sup>Every batch
  - <sup>17</sup>Almost every batch
  - <sup>18</sup> unbiased
  - <sup>19</sup>regularity
  - <sup>20</sup>Stoica
  - <sup>21</sup>Hermitian
  - <sup>22</sup>MATLAB
  - <sup>23</sup>Root mean square error
  - <sup>24</sup>Monte-Carlo
  - <sup>25</sup>Wishart