

کنترل H_∞ مقاوم آموزش پذیر تکرارشونده برای سیستم‌های تأخیر دار زمانی همراه با عدم قطعیت پارامتری: رویکرد تئوری سیستم‌های دوبعدی

مسعود شفیعی^۱ حمیدرضا احمدزاده^۲ ایمان خادمی^۳

۱- استاد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی امیرکبیر- تهران- ایران

mshafiee@aut.ac.ir

۲- دانشجوی دکتری- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی امیرکبیر- تهران- ایران

hr.ahmadzadeh@aut.ac.ir

۳- دانش آموخته کارشناسی ارشد- دانشکده مهندسی برق- دانشگاه صنعتی امیرکبیر- تهران- ایران

i.khademi@aut.ac.ir

چکیده: در این مقاله، مدل فضای حالت Fornasini-Marchesini توسعه-یافته (MF_M) برای کنترل آموزش پذیر تکرارشونده سیستم‌های نامعین دارای تأخیر زمانی معرفی می‌شود. براساس مدل دوبعدی، مسئله طراحی کنترل کننده آموزش پذیر تکرارشونده (ILC) مقاوم به پایدارسازی H_∞ مقاوم یک سیستم دوبعدی دارای تأخیر زمانی تبدیل می‌شود. به منظور پایدارسازی از کنترل کننده فیدبک خروجی استفاده شده است که ضرایب مربوط به کنترل کننده از حل یک مسئله نامساوی ماتریسی خطی (LMI) به دست می‌آید. در انتها، دو مثال عددی به منظور مقایسه روش پیشنهاد شده با ILC کلاسیک و همچنین نشان دادن کارایی آن با استفاده از نرم افزار MATLAB مورد شبیه سازی رایانه ای قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: کنترل آموزش پذیر تکرارشونده، سیستم‌های دوبعدی (2-D)، مدل MF_M تأخیر دار، فیدبک دینامیکی خروجی، پایدارسازی H_∞ مقاوم، نامساوی ماتریسی خطی

نوع مقاله: پژوهشی

DOI: 10.52547/jiaeee.19.3.201

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۷/۲۸

تاریخ پذیرش مشروط مقاله: ۱۳۹۹/۰۳/۲۴

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۷/۲۲

نام نویسنده‌ی مسئول: دکتر مسعود شفیعی

نشانی نویسنده‌ی مسئول: ایران - تهران - خیابان حافظ - پلاک ۴۲۴ - دانشگاه صنعتی امیرکبیر - دانشکده‌ی مهندسی برق

۱- مقدمه

کنترل آموزش پذیر تکرار شونده^۱ (ILC) برای نخستین بار در سال ۱۹۸۴ توسط آریموتو معرفی شد [۱]. هدف اصلی ILC، ردیابی یک مسیر خروجی داده شده در یک بازه زمانی ثابت و محدود در شرایطی که سیستم دارای رفتاری تکرار شونده است. در طی ۲۰ سال گذشته، تکنیک‌ها و الگوریتم‌های متعددی برای ILC پیشنهاد شده است که استفاده از تئوری سیستم‌های دوبعدی یکی از آنهاست که شرایط مناسبی را برای طراحی یک ILC مورد قبول فراهم می‌کند. مستقل بودن دو متغیر تکرار و زمان سبب شده است که بتوان کنترل تکرار شونده‌ی آموزش پذیر را به صورت مدل دوبعدی توصیف کرد. این در حالی است که دو تفاوت عمده بین مدل‌های دوبعدی ILC و سیستم‌های دوبعدی کلاسیک وجود دارد. نخست این که کنترل آموزش پذیر تکرار شونده در یک بازه زمانی محدود تکرار می‌شود و در نتیجه مدل دوبعدی معادل آن در بعد زمان محدود است. از این رو، پایداری در بسیاری از تکنیک‌های ILC مبتنی بر تئوری سیستم‌های دوبعدی تنها در بعد تکرار مورد بررسی قرار گرفته‌اند. از طرفی، غیر علی بودن مدل دوبعدی ILC در بعد زمان به ازای تکرارهای محدود، تفاوت دیگر مدل‌های دوبعدی ILC و سیستم‌های دوبعدی کلاسیک است.

در تکنیک‌های ILC کلاسیک دو فرض اساسی وجود دارد [۲، ۳]:

- یکسان بودن شرایط اولیه‌ی سیستم در تکرارهای مختلف.
- یکسان در نظر گرفتن نامعینی‌های موجود در مدل به ازای تکرارهای مختلف (تکرار پذیر بودن نامعینی‌ها).

بدیهی است که دو فرض بالا بسیار محدود کننده بوده و سبب می‌شود که این دسته از تکنیک‌های ILC برای کاربردهای عملی غیر قابل استفاده باشند. چراکه حضور نامعینی‌های غیر قابل تکرار و هم‌چنین شرایط اولیه متفاوت در تکرارهای مختلف در بسیاری از کاربردهای عملی اجتناب ناپذیر می‌باشند. در سال‌های اخیر، برای در نظر گرفتن مدل‌های واقع‌گرایانه‌تر، الگوریتم‌های ILC که پایداری را هم در بعد زمان و هم در بعد تکرار در نظر می‌گیرند؛ معرفی شده‌اند. در مرجع [۴]، تحلیل پایداری مقاوم و طراحی کنترل کننده‌ی مقاوم هم در بعد زمان و هم در بعد تکرار برای سیستم‌های تکراری مورد بحث قرار گرفته است. هم‌چنین، مرجع [۵] به طراحی کنترل کننده‌ی مقاوم آموزش پذیر تکرار شونده بر اساس فیدبک خروجی دینامیکی پادار ساز برای فرآیندهای تکراری در حضور نامعینی‌ها و شرایط اولیه متفاوت در تکرارهای مختلف پرداخته است. در مرجع [۶]، یک رویکرد جدید ILC مبتنی بر سیستم‌های دوبعدی که امکان استفاده از متغیرهای مختلف را برای فیدبک فراهم می‌کند؛ پیشنهاد شده است. هم‌چنین، مرجع [۷] برای سیستم نامعین یک ILC فیدبک-فیدفوروارد مقاوم بر اساس مدل دوبعدی GR ارائه کرده است. مرجع [۸]، بر اساس تئوری سیستم‌های دوبعدی یک رویکرد کنترلی جدید متشکل از استراتژی ILC در بعد تکرار و کنترل پیشبین مبتنی بر مدل در بعد زمان برای فرآیندهای دسته‌ای^۲ ارائه کرده است.

شایان ذکر است، تمامی این رویکردها بر روی سیستم‌های خطی بدون تأخیر زمانی متمرکز شده‌اند. این در حالی است که حضور تأخیر زمانی در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی مانند فرآیندهای شیمیایی، راکتورهای هسته‌ای، رباتیک، سیستم‌های چندعاملی و سیستم‌های کنترلی تحت شبکه غیر قابل انکار است [۹، ۱۰]. در سیستم‌های تأخیر دار زمانی، حالت‌های آینده‌ی سیستم نه تنها به حالت‌های فعلی، بلکه به حالت‌های گذشته‌ی

سیستم نیز بستگی دارد [۱۱]. این ویژگی سیستم‌های تأخیر دار، تجزیه و تحلیل آن‌ها را از سیستم‌های بدون تأخیر متمایز و در عین حال پیچیده‌تر می‌کند. معمولاً، تأخیر زمانی آثار منفی بر روی رفتار سیستم می‌گذارد به طوری که در بسیاری از موارد، تأخیر زمانی به عنوان یکی از منبع و منشأهای تضعیف عملکرد سیستم شناخته می‌شوند و حتی با ایجاد فاز منفی در سیستم‌ها می‌تواند موجب ناپایداری آن‌ها شود [۱۰]. از این رو، در نظر گرفتن تأخیر زمانی در تحلیل پایداری و طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های تأخیر دار امری ضروری است [۱۱-۱۳]. هنگامی که از تأخیر زمانی صحبت به میان می‌آید منظور دو نوع تأخیر زمانی است: نخست، تأخیر زمانی در ورودی و دیگری تأخیر زمانی در حالت‌های سیستم. منشأ به وجود آمدن تأخیر زمانی در ورودی معمولاً به دلیل کندی در تولید ورودی کنترلی و اعمال آن به سیستم می‌باشد. در حالی که عمل انتقال و جابجایی در سیستم‌ها از عوامل اصلی به وجود آمدن تأخیر زمانی نوع دوم در هستند [۱۴].

در خصوص کنترل آموزش پذیر تکرار شونده‌ی مبتنی بر مدل دوبعدی برای سیستم‌های تأخیر دار پژوهش‌هایی صورت گرفته است [۱۵-۱۹]. مرجع [۱۵] شرایط کافی برای پایداری سیستم‌های دوبعدی گسسته دارای تأخیر زمانی که با مدل MFM توصیف شده‌اند؛ ارائه کرده است و آن را برای حالتی که تأخیرهای چندگانه در سیستم وجود دارد بسط داده است. هم‌چنین، با به کارگیری فیدبک حالت استاتیکی و با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی خطی مشخصی به پایداری و پادار سازی مقاوم این دسته از سیستم‌ها پرداخته است. در مرجع [۱۶] یک استراتژی ILC مقاوم برای فرآیندهای دسته‌ای که دارای نامعینی و تأخیر در ورودی هستند؛ ارائه شده است که در آن با استفاده از مدل سازی فرآیندهای دسته‌ای به صورت سیستم‌های دوبعدی MFM به جبران اثر تأخیر زمانی پرداخته است. در مرجع [۱۷] بر اساس تئوری کنترل سیستم‌های دوبعدی یک ساختار کنترلی دوبعدی فرمول بندی شده است که عملکرد مقاوم H_{∞} سیستم حلقه بسته را هم در بعد زمان و هم در بعد تکرار تضمین می‌کند که برای نیل به این هدف از دو استراتژی کنترلی بهره برده است: نخست، کنترل فیدبک مقاوم برای تضمین عملکرد در بعد زمان و دیگری کنترل آموزش پذیر تکرار شونده نوع تناسبی^۳ برای افزایش عملکرد ردیابی در بعد تکرار. مرجع [۱۸]، یک جبران کننده‌ی دوبعدی بر اساس کنترل آموزش پذیر تکرار شونده برای فرآیندهای دسته‌ای که دارای تأخیر زمانی هم در حالت و ورودی هستند؛ ارائه کرده است. در مرجع [۱۹]، تئوری سیستم‌های دوبعدی برای ILC_ها مورد بررسی قرار گرفته است. در حالی که در آن فرض شده است که سیستم هیچ گونه نامعینی ندارد و شرایط اولیه‌ی آن در تکرارهای مختلف یکسان هستند. هم‌چنین، تأخیر زمانی در مدل دوبعدی معادل پیشنهاد شده ظاهر نشده است.

هدف اصلی این مقاله گسترش تکنیک‌های تئوری سیستم دوبعدی برای سیستم‌های گسسته خطی موجود در [۵] برای سیستم‌های با تأخیر حالت گسسته خطی نامعین است. پایداری الگوریتم ILC در هر دو محور زمان و تکرار به کمک ترم‌های LMI در نظر گرفته شده است. سیستم مورد مطالعه دارای نامعینی است که می‌تواند مانند شرایط اولیه در تکرارهای مختلف متفاوت باشند. متفاوت با مراجع [۱۵-۱۷] که از فیدبک حالت استفاده کرده‌اند؛ یک فرض اساسی در این جا در دسترس بودن تنها خروجی برای به کارگیری در کنترل کننده‌ی فیدبک خروجی است که سبب می‌شود ILC پیشنهادی برای کاربردهای عملی مناسب‌تر باشد. برای طراحی یک الگوریتم ILC مقاوم از کنترل کننده‌ی فیدبک خروجی دینامیکی دوبعدی استفاده شده

$$\begin{aligned} \{x(t,0) = v_{t,0}\}, \quad \forall t \geq 0, \\ \{x(t,k) = w_{t,k}\}, \quad \forall k \geq 0, \quad t = -t_d, -t_d + 1, \dots, 0, \\ v_{00} = w_{00} \end{aligned} \quad (2)$$

تذکره ۱: شایان ذکر است، سیستم دوبعدی به فرم (۱) تنها دارای تأخیر در بعد زمان است در حالی که ساختار کامل سیستم دوبعدی تأخیردار توصیف شده با مدل MFM به صورت

$$\begin{aligned} x(t+1, k+1) &= (A_1 + \Delta A_1)x(t+1, k) + (A_2 + \Delta A_2)x(t, k+1) \\ &+ (A_{1d} + \Delta A_{1d})x(t-t_d, k+1) + (A_{2d} + \Delta A_{2d})x(t+1, k-t_d) \\ &+ (B_1 + \Delta B_1)u(t+1, k) + (B_2 + \Delta B_2)u(t, k+1) \\ &+ H_1 w(t+1, k) + H_2 w(t, k+1), \\ y(t, k) &= Cx(t, k), \end{aligned} \quad (3)$$

بیان می شود که در آن تأخیر در دو هر بعد سیستم وجود دارد. اما از آنجا که در بخش چهارم نشان داده خواهد شد که کنترل آموزش پذیر تکرار شونده به صورت مدل دوبعدی (۱) قابل بیان است لذا در این مقاله تنها این مدل دوبعدی مورد مطالعه قرار می گیرد. در رابطه (۱)، ماتریس های ΔA_1 ، ΔA_2 ،

$$\begin{aligned} \Delta A_1(t, k) &= M_1 F_1(t, k) E_1, \\ \Delta A_2(t, k) &= M_2 F_2(t, k) E_2, \\ \Delta A_d(t, k) &= M_3 F_3(t, k) E_3, \\ \Delta B(t, k) &= M_4 F_4(t, k) E_4, \end{aligned} \quad (4)$$

می باشند. $\{M_i\}_{i=1,2,3,4}$ و $\{E_i\}_{i=1,2,3,4}$ ماتریس هایی معلوم با ابعاد مناسب هستند و $\{F_i(t, k)\}_{i=1,2,3,4}$ ماتریس هایی نامعلوم هستند که بیان گر تغییرات پارامتری سیستم می باشند و در رابطه زیر صدق می کند.

$$F^T(t, k)F(t, k) < I \quad (5)$$

تعریف ۱ [۱۵]: به ازای هر شرایط مرزی دلخواه $\{v_{t,0}, w_{t,k}\}$ و نامعینی های پارامتری به فرم (۴) چنانچه پاسخ ورودی صفر سیستم (۱) رابطه ی

$$\lim_{t,k \rightarrow \infty} x(t, k) = 0, \quad (6)$$

را اقرار کند آنگاه سیستم پایدار مجانبی مقاوم خوانده می شود.

تعریف ۲ [۲۱، ۲۰]: سیگنال دوبعدی $w(t, k)$ را متعلق به فضای ℓ_{2e} گوئیم اگر تساوی

$$\|w\|_{2e} = \sqrt{\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=0}^q \|w(t, k)\|^2} < \infty \quad \forall p, q > 0, \quad (7)$$

برقرار باشد و آن را با نماد $w \in \ell_{2e}$ نمایش می دهیم.

تعریف ۳ [۲۰]: برای مقدار اسکالر $\gamma > 0$ ، سیستم دو بعدی (۱) را دارای عملکرد H_∞ مقاوم با ضریب γ گوئیم، اگر سیستم پایدار باشد و به ازای شرایط مرزی صفر و اغتشاش $w \in \ell_{2e}$ ، پاسخ ورودی صفر سیستم در شرط زیر صدق نماید.

$$\|y\|_{2e} < \gamma \|w\|_{2e} \quad (8)$$

مشابه با سیستم یک بعدی، ضریب γ حداکثر میزان حساسیت خروجی سیستم به اغتشاش را نشان می دهد. بنابراین هر چه γ کوچک تر باشد عملکرد سیستم بهتر خواهد بود. لذا در طراحی کنترل کننده تلاش بر اینست که γ حداقل مقدار ممکن انتخاب گردد.

لم ۱ (مکمل شور) [۲۲]: ماتریس های $L, W = W^T$ و $V = V^T > 0$ را با ابعاد مناسب در نظر بگیرید. نامساوی $W + L^T V L < 0$ برقرار است اگر و تنها اگر نامساوی ماتریسی

$$\begin{bmatrix} W & L^T \\ L & -V^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

برقرار باشد.

است که در مقایسه با کنترل کننده های استاتیکی که در مراجع [۱۶-۱۸] به کار رفته اند از عملکرد به مراتب بهتری برخوردار است.

بخش های بعدی مقاله به شرح زیر سازماندهی و نوشته شده اند. در بخش دوم مدل دوبعدی MFM مورد مطالعه در این مقاله و برخی از تعاریف و لم های کاربردی مرتبط با موضوع مقاله بیان می شوند. در بخش سوم، شرایط پایداری سیستم های دوبعدی توصیف شده با مدل MFM که دارای تأخیر در یک بعد از حالت های خود است استخراج می شود. مدل کردن ILC دارای تأخیر به صورت یک سیستم دوبعدی تأخیردار با مدل MFM در بخش چهارم مطرح خواهد شد. سپس در همین بخش، مسئله ی پایداری با استفاده از فیدبک خروجی دینامیکی فرمول بندی می شود و کنترل کننده ی فیدبک دینامیکی مقاوم برای سیستم های تأخیردار گسسته دوبعدی خطی با استفاده از یک مسئله بهینه سازی به فرم LMI طراحی می شود. در بخش پنجم با تبدیل مدل پیوسته به مدل گسسته، روش پیشنهادی را برای سیستم پیوسته به کار خواهیم برد. همچنین در این بخش با ارائه ی یک مثال، مقایسه ای بین روش ILC پیشنهاد شده در این مقاله و ILC کلاسیک مطرح شده در مرجع [۱۹] صورت خواهد پذیرفت. به منظور ارزیابی بهتر عملکرد روش پیشنهادی بر روی یک مثال عددی دیگر نیز شبیه سازی رایانه ای خواهد شد. بخش ششم به جمع بندی، نتیجه گیری کلی و بیان کارهای آینده اختصاص داده می شود.

علائم ریاضی: بردار $x \in \mathbb{R}^n$ و ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را در نظر بگیرید. نمادهای $\|x(t, k)\|_1$ و $\|A\|$ به ترتیب توصیف کننده ی نرم های بردار x و ماتریس A هستند و با استفاده از رابطه های $\|x(t, k)\|_1 \triangleq x^T(t, k)[x(t, k)]$ و $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ محاسبه می شوند که $\lambda_{\max}(A^T A)$ بیان گر بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $A^T A$ است. A^T ، A^* و A^{-1} به ترتیب به ترانهاده، مزدوج و معکوس ماتریس A اشاره دارند. $A > 0$ به معنای این است که ماتریس A معین مثبت است. ضرب کرونگر با \otimes نمایش داده می شود. نماد "*" در برخی ماتریس ها به منظور نشان دادن درایه ی متقارن ماتریس به کار می رود.

۲- مدل دوبعدی MFM

در این بخش سیستم دوبعدی مورد مطالعه در این مقاله معرفی می شود و سپس تعدادی تعریف مرتبط با موضوع مقاله ارائه خواهد شد. همچنین، تعدادی از لم های کاربردی که در اثبات تئوری های اصلی مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت؛ بیان می شوند.

سیستم دوبعدی گسسته ی نامعین با تأخیر زمانی بر روی حالت که به صورت مدل فضای حالت MFM به فرم

$$\begin{aligned} x(t+1, k+1) &= (A_1 + \Delta A_1)x(t+1, k) + (A_2 + \Delta A_2)x(t, k+1) \\ &+ (A_d + \Delta A_d)x(t-t_d, k+1) + (B + \Delta B)u(t+1, k) + Hw(t+1, k), \\ y(t, k) &= Cx(t, k), \end{aligned} \quad (1)$$

توصیف شده است را در نظر بگیرید که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ بردار متغیرهای حالت و $u \in \mathbb{R}^m$ و $y \in \mathbb{R}^l$ به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی سیستم هستند و $w(t, k)$ اغتشاش سیستم دوبعدی است. عدد صحیح مثبت t_d بیان گر تأخیر در محور زمان است و ماتریس های A, A_d, B و C دارای ابعاد مناسب هستند. شرایط مرزی سیستم به صورت (۲) در نظر گرفته می شود.

خطای ردیابی را هم در بعد زمان و هم در بعد تکرار کمینه کند. تغییر

$$\begin{aligned} x(t, k) &= x_k(t), u(t, k) = u_k(t), \\ r(t, k) &= r_k(t), y(t, k) = y_k(t), \end{aligned} \quad (40)$$

را در نظر بگیرید.

برای دستیابی به فرم دوبعدی ILC متغیرهای خطا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \eta(t, k) &= x(t, k) - x(t, k-1), \\ e(t, k) &= y(t, k) - y_r(t). \end{aligned} \quad (41)$$

$\eta(t, k)$ و $e(t, k)$ به ترتیب به خطای حالت و خروجی اشاره دارند. طراحی قانون کنترل به نحوی صورت می‌گیرد که تضمین شود این دو خطا، هم در بعد زمان و هم در بعد تکرار به سمت صفر هم‌گرا شوند.

با توجه به رابطه‌های (39) و (40) برای $t = 1, 2, \dots, T$ داریم:

$$\begin{aligned} \eta(t+1, k) &= (A + \Delta A(t, k))\eta(t, k) + (A_d + \Delta A_d(t, k))\eta(t-t_d, k) \\ &+ (B + \Delta B(t, k))r(t, k) + w(t, k) \end{aligned} \quad (42)$$

و

$$\begin{aligned} e(t+1, k) &= C(A + \Delta A(t, k))\eta(t, k) + C(A_d + \Delta A_d(t, k))\eta(t-t_d, k) \\ &+ e(t+1, k-1) + C(B + \Delta B(t, k))r(t, k) + Cw(t, k) \end{aligned} \quad (43)$$

که $w(t, k)$ یک اغتشاش غیرقابل تکرار است و به صورت

$$\begin{aligned} w(t, k) &= [\Delta A(t, k) - \Delta A(t, k-1)]x(t, k-1) + [\Delta A_d(t, k) - \\ &\Delta A_d(t, k-1)]x(t-t_d, k-1) + [\Delta B(t, k) - \Delta B(t, k-1)]u(t, k-1) \end{aligned} \quad (44)$$

می‌باشد. از تساوی (44) واضح است که اگر سیستم اولیه دارای تغییرات پارامتری تکرار شونده باشد، آنگاه $w(t, k) = 0$ و تنها کفایت پایداری مقاوم تضمین گردد. در غیر این صورت بایستی کنترل کننده را به گونه‌ای طراحی کنیم که اثر تغییرات پارامتری تکرار شونده بر روی سیستم به حداقل برسد. با ترکیب معادلات (42) و (43) با یکدیگر سیستم افزوده شده‌ی (45) حاصل می‌شود. مشاهده می‌شود که معادله (45) به شکل معادله (1) است. بنابراین یک سیستم دوبعدی تأخیردار با مدل MFM داریم.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \eta(t+1, k) \\ e(t+1, k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + \Delta A(t, k) & 0 \\ C(A + \Delta A(t, k)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(t, k) \\ e(t, k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(t+1, k-1) \\ e(t+1, k-1) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} A_d + \Delta A_d(t, k) & 0 \\ C(A_d + \Delta A_d(t, k)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(t-t_d, k) \\ e(t-t_d, k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B + \Delta B(t, k) \\ C(B + \Delta B(t, k)) \end{bmatrix} r(t, k) + \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix} w(t, k), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} y(t, k) &= \begin{bmatrix} e(t, k-1) \\ e(t, k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(t, k) \\ e(t, k) \end{bmatrix}, \\ z(t, k) &= e(t, k) = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(t, k) \\ e(t, k) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

در سیستم دو بعدی فوق $y(t, k)$ خروجی کنترلی و $z(t, k)$ خروجی اندازه‌گیری است. با دقت در تعریف متغیرها در می‌یابیم که سیستم (45) در واقع معادله دینامیکی خطای ردیابی و خطای متغیرهای حالت می‌باشد. هدف از ارائه مدل فوق بدست آوردن سیگنال $r_k(t)$ است که میزان بهبود ورودی کنترلی نسبت به تکرار قبلی است. فرض ما بر اینست که در حالت کلی به متغیرهای حالت سیستم دسترسی نداریم. لذا مجاز به استفاده از فیدبک حالت نیستیم و تنها می‌توانیم از فیدبک خروجی استفاده کنیم. بجای فیدبک

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} (\gamma^{-1} \|x(t, k)\|_{C^T C} - \gamma \|w(t, k)\|_I) &\leq \sum_{t=0}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} [\Delta V(t, k) + \\ &\gamma^{-1} \|x(t, k)\|_{C^T C} - \gamma \|w(t, k)\|_I] = \sum_{t=0}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} J(t, k) \leq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

بدان معنا که

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} \gamma^{-1} \|x(t, k)\|_{C^T C} &\leq \sum_{t=0}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} \gamma \|w(t, k)\|_I \Rightarrow \\ \|y(t, k)\|_{2e} &\leq \gamma \|w(t, k)\|_{2e} \end{aligned} \quad (37)$$

که نشان می‌دهد سیستم دوبعدی دارای تأخیر (1) دارای عملکرد H_∞ مقاوم γ است.

تذکر 2: شایان ذکر است، رابطه‌ی (29) معرف تابع تغییرات انرژی سیستم است و منفی بودن آن به منظور تضمین پایداری ضروری است. بنابراین، بایستی با انتخاب مناسب ضرایب $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3}$ مثبت بودن ترم نخست رابطه‌ی (29) به توسط سه ترم منفی دیگر جبران شود. لذا، با توجه به بیشتر بودن تعداد ترم‌های منفی در مقایسه با ترم‌های مثبت و همچنین امکان انتخاب وزن هر کدام از ترم‌های منفی به وسیله‌ی ضرایب $\{\alpha_i\}_{i=1,2,3}$ ، قضیه‌ی فوق از جنبه‌ی محافظه‌کاری قابل قبولی برخوردار می‌باشد.

4- طراحی ILC مبتنی بر مدل دوبعدی MFM

در این بخش، نخست سیستم تکرار شونده‌ی نامعین دارای تأخیر یک بعدی به صورت یک سیستم دوبعدی با مدل MFM که دارای نامعینی و تأخیر است؛ معادل‌سازی می‌شود. سپس، کنترل کننده‌ی دینامیکی مقاوم با توجه به نتایج به دست آمده در بخش سوم طراحی می‌شود.

4-1- مدل دوبعدی MFM برای ILC تأخیردار نامعین

سیستم آموزش پذیر تکرار شونده خطی تأخیردار با مدل فضای حالت یک بعدی (38) را در نظر بگیرید که در آن اندیس k نشان دهنده مرتبه تکرار و دوره‌ی زمانی هستند.

$$\begin{aligned} x_k(t+1) &= (A + \Delta A(t, k))x_k(t) + (A_d + \Delta A_d(t, k))x_k(t-t_d) \\ &+ (B + \Delta B(t, k))u_k(t), \\ y_k(t) &= Cx_k(t), \end{aligned} \quad (38)$$

$$x_k(t) = x_{tk} \quad -t_d \leq t \leq 0.$$

همچنین، $x_k(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $u_k(t) \in \mathbb{R}^m$ و $y_k(t) \in \mathbb{R}^l$ به بردارهای حالت، ورودی و خروجی در لحظه‌ی t و تکرار k اشاره دارد. t_d مقدار تأخیر در بعد زمان را نشان می‌دهد. بردار x_{tk} به شرایط مرزی در تکرار k اشاره دارد. ماتریس‌های موجود در سیستم (38) دارای ویژگی و ساختارهایی مشابه با سیستم (1) هستند.

قانون ILC کلی به صورت

$$\begin{aligned} u_{k+1}(t) &= u_k(t) + r_{k+1}(t), \\ u_0(t) &= 0, \quad t = 0, 1, \dots, T \end{aligned} \quad (39)$$

در نظر گرفته می‌شود. $r_k(t)$ ترم اصلاحی قانون کنترل بالا نامیده می‌شود. خروجی مرجع سیستم در تمامی تکرارها یکسان فرض می‌شود و با $y_r(t)$ نمایش داده می‌شود. هدف، یافتن یک قانون ILC به نحوی است که نرم

قضیه‌ی زیر شرط کافی برای وجود یک کنترل کننده خروجی دینامیکی مانند (۴۸) که با اعمال آن به سیستم (۴۷) عملکرد H_∞ مقاوم سیستم حلقه‌ی حاصل (۵۰) تضمین شود را بیان می‌کند.

قضیه ۳: فرض کنید $\gamma > 0$ و $0 < \beta \leq 1$ داده شده باشند. آنگاه شرط کافی برای وجود کنترل کننده فیدبک خروجی به شکل (۴۸) که پایداری H_∞ مقاوم با ضریب عملکرد γ سیستم حلقه‌بسته (۴۹) را تضمین کند اینست که ماتریس‌های $\{\bar{A}_{ic}, \bar{B}_{ic}, \bar{C}_{ic}, \bar{D}_{ic}\}_{i=1,2}$ ، $\{\bar{A}_{2d}, \bar{B}_{2d}, \bar{C}_{2d}\}$ و ماتریس‌های $X > 0$ و $Y > 0$ ، اسکالرهای $\{\alpha_i > 0\}_{i=1,2,3}$ و $\{\varepsilon_i > 0\}_{i=1,2,3,4}$ وجود داشته باشند به طوری که نامعادلات ماتریسی خطی زیر برقرار باشند:

$$\begin{bmatrix} -\Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & 0 & \Omega_{15} \\ * & -\Omega_{22} & 0 & \Omega_{24} & \Omega_{25} \\ * & * & -\Omega_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Omega_{44} & 0 \\ * & * & * & * & -\Omega_{55} \end{bmatrix} < 0 \quad (51)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \leq 1 \quad (52)$$

که

$$\Omega_{11} = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}, \Omega_{12} = [A_1 \ A_2 \ A_{2d}], \Omega_{13} = [M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4] \quad (53)$$

$$\Omega_{15} = \begin{bmatrix} H & 0 \\ YH & 0 \end{bmatrix}, \Omega_{22} = -diag\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \otimes \Omega_{11}, \Omega_{25} = \begin{bmatrix} \gamma I & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{24} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & E_{41} \\ 0 & E_2 & 0 & E_{42} \\ 0 & 0 & E_3 & E_{4d} \end{bmatrix}, \Omega_{25} = \begin{bmatrix} X & I \\ I & 0 \end{bmatrix} C^T$$

$$\Omega_{33} = diag\{\varepsilon_i I\}_{i=1,2,3,4}, \Omega_{44} = diag\{\varepsilon_i^{-1} I\}_{i=1,2,3,4}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 X + \hat{B} \hat{C}_{1c} & \hat{A}_1 + \hat{B} \hat{D}_{1c} \hat{C} \\ \hat{A}_{1c} & Y \hat{A}_1 + \hat{B}_{1c} \hat{C} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \hat{A}_2 X + \hat{B} \hat{C}_{2c} & \hat{A}_2 + \hat{B} \hat{D}_{2c} \hat{C} \\ \hat{A}_{2c} & Y \hat{A}_2 + \hat{B}_{2c} \hat{C} \end{bmatrix}$$

$$A_{2d} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{2d} X + \hat{B} \hat{C}_{2dc} & \hat{A}_{2d} + \hat{B} \hat{D}_{2dc} \hat{C} \\ \hat{A}_{2dc} & Y \hat{A}_{2d} + \hat{B}_{2dc} \hat{C} \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} I \\ Y \end{bmatrix} \tilde{M}_1$$

$$E_i = \begin{bmatrix} X \\ I \end{bmatrix} \tilde{E}_i^T \quad i=1,2,3,4, E_{4i} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{2dc}^T \\ \tilde{C}^T \tilde{D}_{1c}^T \end{bmatrix} \quad i=1,2, E_{4d} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{2dc}^T \\ \tilde{C}^T \tilde{D}_{2dc}^T \end{bmatrix}$$

$$D_{1c} = \tilde{D}_{1c}, D_{2c} = \tilde{D}_{2c}, D_{2dc} = \tilde{D}_{2dc}$$

$$C_{1c} = (\tilde{C}_{1c} - D_{1c} \hat{C} X) M^{-T}, C_{2c} = (\tilde{C}_{2c} - D_{2c} \hat{C} X) M^{-T}$$

$$C_{2dc} = (\tilde{C}_{2dc} - D_{2dc} \hat{C} X) M^{-T}, B_{1c} = N^{-1} (\tilde{B}_{1c} - Y \hat{B} D_{1c}),$$

$$B_{2c} = N^{-1} (\tilde{B}_{2c} - Y \hat{B} D_{2c}), B_{2dc} = N^{-1} (\tilde{B}_{2dc} - Y \hat{B} D_{2dc}),$$

$$A_{1c} = N^{-1} (\tilde{A}_{1c} - Y \hat{A}_1 X - Y \hat{B} \tilde{C}_{1c}) M^{-T} - B_{1c} C X M^{-T}$$

$$A_{2c} = N^{-1} (\tilde{A}_{2c} - Y \hat{A}_2 X - Y \hat{B} \tilde{C}_{2c}) M^{-T} - B_{2c} C X M^{-T}$$

$$A_{2dc} = N^{-1} (\tilde{A}_{2dc} - Y \hat{A}_{2d} X - Y \hat{B} \tilde{C}_{2dc}) M^{-T} - B_{2dc} C X M^{-T}$$

$$\tilde{D}_{1c} = D_{1c}; \tilde{D}_{2c} = D_{2c}; \tilde{D}_{2dc} = D_{2dc}; \tilde{C}_{1c} = D_{1c} \hat{C} X + C_{1c} M^T;$$

$$\tilde{C}_{2c} = D_{2c} \hat{C} X + C_{2c} M^T; \tilde{C}_{2dc} = D_{2dc} \hat{C} X + C_{2dc} M^T;$$

$$\tilde{A}_{1c} = Y (\hat{A}_1 + \hat{B} \hat{D} \hat{C}) X + N B_{1c} \hat{C} X + (Y \hat{B} \tilde{C}_{1c} + N A_{1c}) M^T;$$

$$\tilde{A}_{2c} = Y (\hat{A}_2 + \hat{B} \hat{D} \hat{C}) X + N B_{2c} \hat{C} X + (Y \hat{B} \tilde{C}_{2c} + N A_{2c}) M^T;$$

$$\tilde{A}_{2dc} = Y (\hat{A}_{2d} + \hat{B} \hat{D} \hat{C}) X + N B_{2dc} \hat{C} X + (Y \hat{B} \tilde{C}_{2dc} + N A_{2dc}) M^T;$$

$$\tilde{B}_{1c} = Y \hat{B} D_{1c} + N B_{1c}; \tilde{B}_{2c} = Y \hat{B} D_{2c} + N B_{2c}; \tilde{B}_{2dc} = Y \hat{B} D_{2dc} + N B_{2dc};$$

$$N = M^{-1} (I - X Y) \quad \text{و} \quad M = N^{-1} \quad \text{در تساوی} \quad I - X Y = M N^T \quad \text{صدق می‌کنند.}$$

می‌کنند.

اثبات:

با توجه به قضیه ۳، شرط کافی برای برقراری عملکرد H_∞ مقاوم سیستم حلقه (۵۰) وجود جواب ماتریس مثبت معین P برای نامعادله (۵۴) می‌باشد.

استاتیکی، حالت کلی تری را در نظر می‌گیریم که در آن از فیدبک دینامیکی خروجی استفاده می‌شود.

با تعریف کردن $\hat{x}(t) = [\eta(t, k)^T, e(t, k)^T]^T$ و ماتریس‌های

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ CA & 0 \end{bmatrix}, \hat{A}_{d1} = 0, \hat{A}_{d2} = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ CA_d & 0 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\hat{B}_1 = 0, \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} C \\ CB \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} -C & I \\ 0 & I \end{bmatrix}, \hat{H} = \begin{bmatrix} I \\ C \end{bmatrix}, \hat{G} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

می‌توان معادله (۴۵) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\hat{x}(t, k+1) = \hat{A}_1 \hat{x}(t, k) + (\hat{A}_2 + \Delta \hat{A}_2(t, k)) \hat{x}(t-1, k+1) \quad (47)$$

$$+ (\hat{A}_{d2} + \Delta \hat{A}_{d2}(t, k)) \hat{x}(t-t_d, k+1)$$

$$+ (\hat{B}_2 + \Delta \hat{B}_2(t, k)) u(t, k) + \hat{H} w(t, k),$$

$$\hat{y}(t, k) = \hat{C} \hat{x}(t, k),$$

$$\hat{z}(t, k) = \hat{G} \hat{x}(t, k).$$

۴-۲- پایدارسازی فیدبک خروجی دینامیکی مقاوم

در بسیاری از کاربردها تمام حالت‌های سیستم در دسترس نیستند و اندازه‌گیری یا تخمین آن‌ها هزینه‌بر است. از این‌رو، در چنین موقعیتی کنترل کننده‌های مبتنی بر فیدبک حالت عملیاتی نیستند. از سویی دیگر کنترل کننده‌های دینامیکی در مقایسه با کنترل کننده‌های استاتیکی پارامترهای طراحی بیشتری دارد که باعث افزایش درجه آزادی و در نهایت عملکرد بهتر سیستم می‌شود. از این‌رو کنترل کننده دینامیکی زیر را در نظر بگیرد:

$$x_c(t+1, k+1) = A_{1c} x_c(t+1, k) + B_{1c} y(t+1, k) + A_{2c} x_c(t, k+1) \quad (48)$$

$$+ B_{2c} y(t, k+1) + A_{dc} x(t-t_d, k+1) + B_{dc} y(t-t_d, k+1),$$

$$y_c(t, k) = C_{1c} x_c(t+1, k) + C_{2c} x_c(t, k+1) + C_{dc} x_c(t-t_d, k+1)$$

$$+ D_{1c} y(t+1, k) + D_{2c} y(t, k+1) + D_{dc} y(t-t_d, k+1),$$

که در آن $x_c(t, k) \in \mathbb{R}^n$ بردار متغیرهای حالت کنترل کننده است. هم‌چنین، ماتریس‌های

$$\{D_{dc}, D_{2c}, D_{1c}, C_{dc}, C_{2c}, C_{1c}, B_{2c}, B_{1c}, A_{dc}, A_{2c}, A_{1c}\}$$

پارامترهای طراحی کنترل کننده هستند که در ادامه تعیین می‌شوند.

سیستم حلقه‌بسته با اعمال ورودی کنترلی (۴۸) به سیستم (۴۷) به صورت

$$\tilde{x}(t, k+1) = \quad (49)$$

$$(\tilde{A}_1 + \Delta \tilde{A}_2(t, k)) \tilde{x}(t+1, k) + (\tilde{A}_2 + \Delta \tilde{A}_2(t, k)) \tilde{x}(t, k+1)$$

$$+ (\tilde{A}_{2d} + \Delta \tilde{A}_{2d}(t, k)) \tilde{x}(t-t_d, k) + \tilde{H} w(t, k),$$

$$\tilde{y}(t, k) = \tilde{C} \tilde{x}(t, k),$$

$$\tilde{z}(t, k) = \tilde{G} \tilde{x}(t, k).$$

به دست می‌آید. در معادلات بالا داریم:

$$\tilde{x}(t, k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t, k) \\ x_c(t, k) \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} \hat{C} & 0 \end{bmatrix}, \tilde{H} = \begin{bmatrix} \hat{H} \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{G} = \begin{bmatrix} \hat{G} & 0 \end{bmatrix}.$$

هم‌چنین، ماتریس‌های سیستم حلقه‌بسته برابر هستند با:

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 + \hat{B}_2 D_{1c} \hat{C} & \hat{B}_2 C_{1c} \\ B_{1c} \hat{C} & A_{1c} \end{bmatrix}, \Delta \tilde{A}_1(t, k) = \begin{bmatrix} \Delta \hat{B}_2 D_{1c} \hat{C} & \Delta \hat{B}_2 C_{1c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (50)$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} \hat{A}_2 + \hat{B}_2 D_{2c} \hat{C} & \hat{B}_2 C_{2c} \\ B_{2c} \hat{C} & A_{2c} \end{bmatrix}, \Delta \tilde{A}_2(t, k) = \begin{bmatrix} \Delta \hat{A}_2 + \Delta \hat{B}_2 D_{2c} \hat{C} & \Delta \hat{B}_2 C_{2c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{2d} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{2d} + \hat{B}_2 D_{2dc} \hat{C} & \hat{B}_2 C_{2dc} \\ B_{2dc} \hat{C} & A_{2dc} \end{bmatrix}, \Delta \tilde{A}_{2d}(t, k) = \begin{bmatrix} \Delta \hat{A}_{2d} + \Delta \hat{B}_2 D_{2dc} \hat{C} & \Delta \hat{B}_2 C_{2dc} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 A_{1c} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7372 & 0.0019 & 0.2462 & -0.4507 & -0.0809 \\ 1.2456 & -0.0036 & -0.5019 & -0.9326 & 0.3005 \\ 0.2500 & -0.0004 & -0.0285 & 0.0577 & -0.0857 \end{bmatrix}, \\
 A_{2c} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0334 & -0.0001 & -0.0087 & -0.0013 & 0.0586 \\ 0.0286 & -0.0001 & -0.0070 & -0.0011 & 0.0467 \\ -0.0084 & 0.0001 & -0.0015 & 0.0004 & 0.0140 \end{bmatrix}, \\
 A_{2dc} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0007 & 0 & 0.0010 & 0.0004 & 0.0024 \\ -0.0005 & 0 & 0.0012 & 0.0004 & 0.0028 \\ -0.0026 & 0 & -0.0037 & -0.0009 & -0.0073 \end{bmatrix}, \\
 B_{1c} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1609 & 0.0010 & -1.1501 & -0.0510 \\ -2.1895 & 0.1122 & 2.3790 & 0.1131 \\ 0.2517 & -0.0714 & 0.1412 & 0.0150 \end{bmatrix}, \\
 B_{2c} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0697 & -0.0343 & -0.0681 & 0.0343 \\ -0.1388 & 0.0698 & 0.1404 & -0.0700 \\ -0.0110 & 0.0076 & 0.0089 & -0.0053 \end{bmatrix}, \\
 B_{2dc} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0697 & -0.0343 & -0.0681 & 0.0343 \\ -0.1388 & 0.0698 & 0.1404 & -0.0700 \\ -0.0110 & 0.0076 & 0.0089 & -0.0053 \end{bmatrix}, \\
 C_{1c} &= \begin{bmatrix} -8.5886 & 0.0245 & 3.3687 & -6.2430 & -1.9036 \\ -2.9596 & 0.0102 & 1.4856 & -2.7970 & -1.2760 \end{bmatrix}, \\
 C_{2c} &= \begin{bmatrix} -0.6184 & -0.0017 & 0.02393 & 0.4290 & 0.1372 \\ 0.6232 & -0.0017 & -0.2468 & 0.4263 & 0.1200 \end{bmatrix}, \\
 D_{1c} &= \begin{bmatrix} 33.8731 & -1.1303 & -34.9503 & -0.2675 \\ 5.4460 & 17.8964 & -6.6004 & -18.9089 \end{bmatrix}, \\
 D_{2c} &= \begin{bmatrix} 0.3884 & -0.1264 & -16.2961 & -0.4360 \\ 1.4339 & -0.4434 & -15.8645 & -12.7947 \end{bmatrix}, \\
 D_{2dc} &= \begin{bmatrix} 1.5669 & -0.4640 & -1.5180 & 0.5513 \\ 0.5051 & 0.8131 & -0.4679 & -0.7259 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

فرض ثابت مسائل را حل می‌کنیم و در صورت عدم وجود جواب، حتی الامکان مقادیر مورد نظر را تغییر می‌دهیم تا به جواب برسیم.

تذکر ۴: همان‌طور که در ابتدای این زیربخش بدان اشاره شد، کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی از نوع دینامیکی است و هم‌چنین دارای تأخیر زمانی است. که در مقایسه با کنترل‌کننده‌های استاتیکی و بدون تأخیر زمانی از درجه آزادی بیشتری برخوردار است. این موضوع سبب شده است که پارامترهای طراحی در نامعادلات ماتریسی (۵۱) و (۵۲) بیشتر شده و در نهایت حل‌پذیری آن‌ها افزایش یابد.

۵- شبیه‌سازی رایانه‌ای

مثال ۱: در این مثال ILC پیشنهاد شده در این مقاله با ILC کلاسیک پیشنهادی در [۱۹] مقایسه خواهد شد. سیستم یک بعدی چند ورودی-چند خروجی دارای تأخیر زمانی

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(t-0.5) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u(t)
 \tag{62}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

را در نظر بگیرید. شرایط اولیه‌ی متغیرهای حالت برای $t \in [-0.5, 0]$ برابر

است با $x(t) = [t \ t \ t]^T$. خروجی مرجع $y_r(t)$ به صورت

$$y_r(t) = \begin{bmatrix} y_{r_1}(t) \\ y_{r_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12t^2(1-t) \\ 1.5t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 1].
 \tag{63}$$

فرض می‌شود.

عملکرد ردیابی سیستم با تابع مجموع مربعات خطای ردیابی (TSE) به

صورت

$$EE(t) = \int_0^1 [y_r(t) - y(t)]^2 dt
 \tag{64}$$

ارزیابی خواهد شد. برای به کارگیری روش پیشنهادی بایستی مدل پیوسته‌ی داده شده‌ی (۶۲) را به مدل گسسته‌ی یک بعدی معادل آن تبدیل کرد. برای سیستم $\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau) + Bu(t)$ توصیف گسسته‌ی (۶۵) را به کمک نگهدارنده‌ی مرتبه‌ی اول (Z.O.H) خواهیم داشت [۲۳].

$$x(kT + T) = Gx(kT) + Fx(kT - d) + Hu(kT)
 \tag{65}$$

که در آن داریم:

$$G = e^{AT}, \quad F = (G - I_n)A^{-1}A_d, \quad H = (G - I_n)A^{-1}B
 \tag{66}$$

با انتخاب دوره‌ی نمونه‌برداری برابر $T = 0.05 \text{ sec}$ ماتریس‌های F , G و H به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$G = \begin{bmatrix} 0.8588 & 0.0363 & 0.0020 \\ -0.0726 & 0.6066 & 0.0746 \\ -0.002 & 0.0373 & 0.9068 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -0.0010 & 0.0464 \\ -0.0414 & 0 \\ -4.0486 & 0.0476 \end{bmatrix}
 \tag{67}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.0464 & 0.0454 & -0.0005 \\ -0.0010 & 0.0414 & -0.0186 \\ 0.0238 & 0.0011 & 0.0233 \end{bmatrix}$$

اکنون برای مدل گسسته‌ی ILC می‌توانیم مدل MFM به فرم (۴۵) بنویسیم. از آن‌جا که مدل یک بعدی فاقد نامعینی است، طبیعتاً مدل دوبعدی معادل نیز فاقد نامعینی خواهد بود. با به کارگیری قضیه‌ی ۳ با $\varepsilon_i = 0.5$ و $\gamma = 30$, $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.6$, $\alpha_3 = 0.1$ ماتریسی کنترل‌کننده (۴۸) با حل مسئله LMI به کمک نرم جعبه‌افزار نرم‌افزار MATLAB به صورت (۶۸) به دست می‌آیند.

الف) مقایسه‌ی ILC پیشنهادی با ILC کلاسیک با شرایط اولیه‌ی معین

در این قسمت فرض می‌کنیم که شرایط اولیه در تمامی تکرارها یکسان است. چون تنها خروجی سیستم در دسترس است قانون کنترل کلاسیک را به صورت

$$u(t, k+1) = u(t, k) + K \frac{\partial e(t, k)}{\partial t}
 \tag{69}$$

که در مرجع [۱۹] آمده است در نظر می‌گیریم. در مرجع [۱۹] بهره‌ی K برابر $\text{diag}\{0.8, 0.8\}$ به دست آمده است. در جدول‌های ۱ و ۲، روش ILC کلاسیک با روش پیشنهادی این مقاله براساس معیار ارزیابی TSE برای خروجی‌های اول و دوم با یکدیگر مقایسه شده‌اند. شکل‌های ۲ و ۳ منحنی‌های TSE خروجی اول و دوم را به ترتیب برای روش ILC کلاسیک و پیشنهادی این مقاله در ۱۰ نخست نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل‌ها و جدول‌ها مشاهده می‌شود، هر دو رویکرد به خوبی توانسته‌اند با بروزرسانی ورودی کنترلی در هر تکرار ردیابی را به خوبی تحقق بخشند. اما نکته‌ی قابل توجه

به دست خواهند آمد. ماتریس‌های توصیف‌کننده نامعینی‌ها به صورت

$$M_1 = M_3 = M_4 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (73)$$

$$E_1 = E_3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

در نظر گرفته شده‌اند. ماتریس‌های نامعلوم متغیر $\{F_i\}_{i=1}^4 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ به صورت قطری هستند که درایه‌های روی قطر به صورت تصادفی تغییر می‌کنند. با به کارگیری قضیه ۳ با $\gamma = 5, \alpha_1 = 0.45, \alpha_2 = 0.45, \alpha_3 = 0.1$ و $\varepsilon_i = 0.4$ برای $i = 1, 2, 3, 4$ ضرایب ماتریسی کنترل‌کننده به صورت (۷۴) به دست می‌آید:

$$A_{1c} = \begin{bmatrix} -0.0019 & -0.0020 & -0.0020 \\ -0.0225 & -0.0225 & -0.0210 \\ -0.0607 & -0.0632 & -0.0671 \end{bmatrix}, A_{2c} = \begin{bmatrix} -0.0038 & 0.0053 & 0.0021 \\ -0.0430 & 0.0588 & 0.0227 \\ -0.0877 & 0.1340 & 0.0529 \end{bmatrix}, \quad (74)$$

$$A_{3dc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.0021 & -0.0005 & -0.0004 \\ -0.0343 & -0.0681 & 0.0018 \end{bmatrix},$$

$$B_{1c} = \begin{bmatrix} 0.0014 & 0.0023 \\ -0.0225 & 0.0324 \\ -0.0366 & 0.0666 \end{bmatrix}, B_{2c} = \begin{bmatrix} -0.0023 & -0.0609 \\ -0.0258 & 0.0410 \\ -0.0523 & -0.0509 \end{bmatrix},$$

$$B_{3dc} = \begin{bmatrix} -0.0002 & -0.0002 \\ -0.0109 & 0.0101 \\ -0.0009 & -0.0015 \end{bmatrix}, C_{1c} = \begin{bmatrix} 0.0130 & 0.0763 & -0.1719 \\ 0.0708 & 0.0893 & -0.2798 \end{bmatrix},$$

$$C_{2c} = \begin{bmatrix} -0.0642 & 0.0763 & -0.1719 \\ 0.0708 & 0.0893 & -0.2798 \end{bmatrix}, D_{1c} = \begin{bmatrix} -0.5529 & 0.5194 \\ 0.5375 & -0.5769 \end{bmatrix},$$

$$D_{2c} = \begin{bmatrix} -0.5098 & 0.5260 \\ 0.7420 & -0.7428 \end{bmatrix}, D_{3dc} = \begin{bmatrix} 0.0078 & 0.9326 \\ -0.0181 & -0.9428 \end{bmatrix}.$$

خروجی مرجع در این مثال به صورت

$$y_r(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 10 \\ 200 & 11 \leq t \leq 25 \\ 150 & 26 \leq t \leq 50 \end{cases} \quad (75)$$

در نظر گرفته شده است. شکل‌های ۶، ۷ و ۸ به ترتیب خروجی و ورودی‌های اول و دوم سیستم را در تکرارهای دوم، سوم و چهارم نشان می‌دهند. بدیهی خواهد بود که تابع مجموع مربعات خطا در حالتی که نامعینی‌های تکرارناشونده در سیستم وجود دارد کاملاً صفر نمی‌شود. اما با توجه به رابطه (۴۴)، اثر نامطلوب متفاوت بودن نامعینی‌ها در تکرارهای مختلف به صورت یک اغتشاش مدل شده است که کنترل‌کننده H_∞ مقاوم پیشنهادی به خوبی قادر به کاهش این اثر نامطلوب کرده است که نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی تاییدکننده آن است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کنترل آموزش‌پذیر تکرارشونده برای سیستم‌های با تأخیردار گسسته-زمان و نامعین مورد مطالعه قرار گرفت. هم‌چنین نشان داده شد که تئوری سیستم‌های دوبعدی می‌تواند یک ساختار ریاضی برای مدل کردن و طراحی کردن یک کنترل‌کننده مقاوم با در نظر گرفتن پایداری هم در بعد زمان و هم در بعد مکان را فراهم کند. شرایط وجود چنین کنترل‌کننده‌ی خروجی دوبعدی با عملکرد مقاوم بر حسب ترم‌های LMI که با استفاده از جعبه‌افزار موجود در نرم‌افزار MATLAB قابل حل است؛ بیان شد. درنهایت با ارائه‌ی یک مثال مقایسه‌ای بین روش ILC دوبعدی پیشنهادشده در این مقاله و روش ILC کلاسیک مطرح شده در مرجع [۱۹] صورت پذیرفت. مثال دیگری نیز برای نشان دادن صحت و کارایی روش پیشنهادی شبیه‌سازی رایانه‌ای شد.

در حالتی که نامعینی وجود ندارد و شرایط اولیه در هر تکرار با سایر تکرارها یکسان هستند؛ این است که تمایز مهمی بین اجراها وجود ندارد و تابع مجموع مربعات خطا در هر دو رویکرد برای خروجی اول و دوم به ترتیب از تکرار شش و هفت به بعد با تقریب خوبی صفر شده‌اند که نشان از عملکرد بالای ردیابی دارد.

(ب) مقایسه‌ی ILC پیشنهادی با ILC کلاسیک با شرایط اولیه نامعین

در این قسمت فرض می‌کنیم که شرایط اولیه به صورت تصادفی در تکرارهای مختلف تغییر می‌کند. در این قسمت، قانون ILC کلاسیک مشابه با (۷۰) در نظر گرفته می‌شود. شرایط اولیه به صورت

$$x_k(t) = [t + \delta_1(t, k) \quad t + \delta_2(t, k) \quad t + \delta_3(t, k)] \quad (70)$$

در نظر گرفته شده است که در آن δ_1, δ_2 و δ_3 متغیرهای تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[-2, 2]$ می‌باشند. روش ILC کلاسیک با روش پیشنهادی این مقاله براساس معیار ارزیابی TSE برای خروجی‌های اول و دوم با یکدیگر در جدول‌های ۳ و ۴ مقایسه شده‌اند. هم‌چنین، شکل‌های ۴ و ۵، منحنی‌های TSE خروجی اول و دوم را به ترتیب برای روش ILC کلاسیک و پیشنهادی این مقاله در ۱۰ تکرار نخست را نشان می‌دهند. در این حالت، با توجه به متفاوت بودن شرایط اولیه در تکرارهای مختلف هیچ‌گاه تضمینی برای صفر شدن تابع مجموع مربعات خطا وجود ندارد چراکه در بروزسانی ورودی کنترل از اطلاعات به دست آمده در تکرار گذشته استفاده می‌شود که شرایط اولیه در آن با تکرار فعلی متفاوت است. در این میان، رویکرد ILC کلاسیک در مقایسه با رویکرد پیشنهادی توسط این مقاله، حساسیت بیشتری در برابر متفاوت بودن شرایط اولیه دارد که باعث به وجود آمدن تفاوت معناداری در نتایج حاصل از به کارگیری این دو روش شده است. این در حالی است که در ILC پیشنهادی بر خلاف ILC کلاسیک، اثبات همگرایی مقاوم را به صورت همزمان در دو بعد در نظر گرفته شده است و به شرایط اولیه تکرارهای مختلف به چشم شرایط مرزی در بعد تکرار یک سیستم دوبعدی گسسته نگاه شده است.

مثال ۲: سیستم آموزش‌پذیر تکرارشونده‌ی دارای تأخیر زیر را نظر بگیرید.

$$x_k(t+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1(t, k) & 0 \\ 0 & \delta_2(t, k) \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix} x_k(t) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0.25 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \delta_3(t, k) & 0 \\ 0 & \delta_4(t, k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix} x_k(t-3)$$

$$+ \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_5(t, k) & 0 \\ 0 & \delta_6(t, k) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} u_k(t),$$

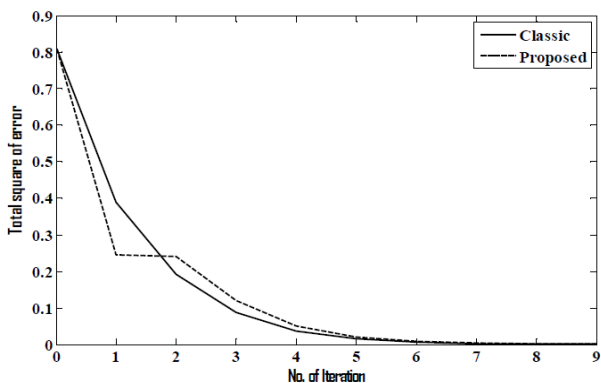
$$y(t) = [0 \quad 1] x_k(t).$$

$\{\delta_i\}_{i=1}^6$ متغیرهای تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[-1, 1]$ می‌باشند. شرایط اولیه برای سیستم (۷۲) نیز به صورت تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه‌ی $[-2.5, 2]$ در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از رابطه‌ی (۴۴)، ماتریس‌های مدل دوبعدی ILC به صورت

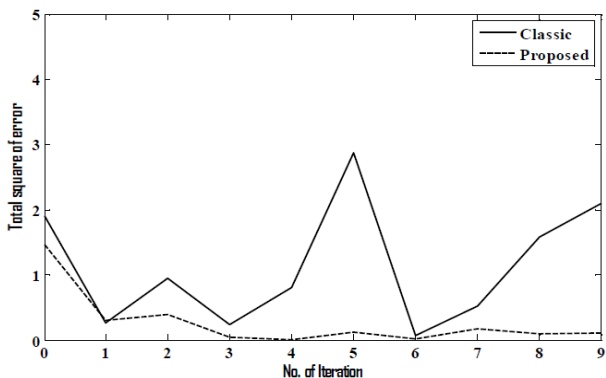
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (72)$$

$$A_{2d} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

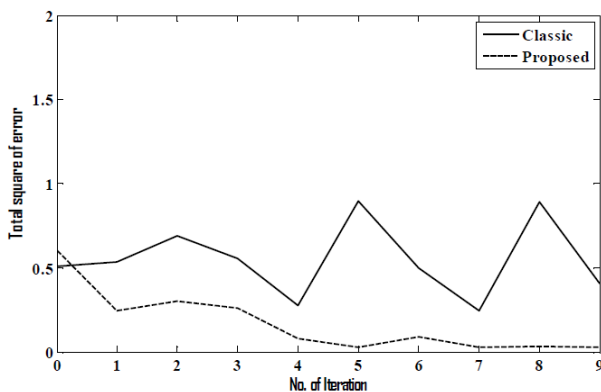
$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = [0 \quad 0 \quad 1].$$



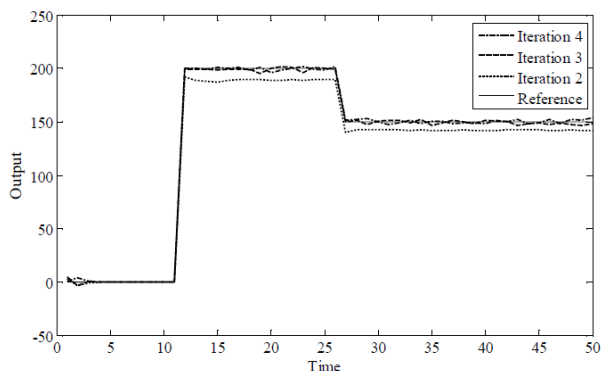
شکل (۳): مجموع مربعات خطای ردیابی خروجی دوم در بازه‌ی زمانی [0,1] در مثال ۱-الف



شکل (۴): مجموع مربعات خطای ردیابی خروجی اول در بازه‌ی زمانی [0,1] در مثال ۱-ب



شکل (۵): مجموع مربعات خطای ردیابی خروجی دوم در بازه‌ی زمانی [0,1] در مثال ۱-ب



شکل (۶): ردیابی خروجی در مثال ۲ برای تکرارهای دوم، سوم و چهارم

در ۱۰ تکرار اول برای خروجی اول مثال ۱-الف با TSE جدول (۱): مقادیر پیشنهادی (شرایط ILC کلاسیک و روش ILC به کارگیری روش

اولیه یکسان)

تکرار	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
روش ILC کلاسیک	۱,۲۴۷۱	۰,۵۵۶۹	۰,۲۲۲۴	۰,۰۸۷۹	۰,۰۳۰۷	۰,۰۱۰۱	۰,۰۰۳۱	۰,۰۰۰۹	۰,۰۰۰۳	۰,۰۰۰۱
پیشنهادی	۱,۲۴۷۱	۰,۲۸۱۳	۰,۰۷۲۴	۰,۰۲۴۰	۰,۰۰۸۸	۰,۰۰۲۶	۰,۰۰۱۷	۰,۰۰۱۰	۰,۰۰۰۷	۰,۰۰۰۶

جدول (۲): مقادیر TSE در ۱۰ تکرار اول برای خروجی دوم مثال ۱-الف

(شرایط اولیه یکسان)

تکرار	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
روش ILC کلاسیک	۰,۸۱۱۵	۰,۳۹۰۴	۰,۱۹۱۶	۰,۰۸۳۳	۰,۰۳۷۲	۰,۰۱۴۲	۰,۰۰۵۰	۰,۰۰۱۶	۰,۰۰۰۵	۰,۰۰۰۱
پیشنهادی	۰,۸۱۱۵	۰,۲۴۴۶	۰,۰۶۱۶	۰,۰۲۰۱	۰,۰۰۶۶	۰,۰۰۱۶	۰,۰۰۰۸	۰,۰۰۰۴	۰,۰۰۰۲	۰,۰۰۰۱

جدول (۳): مقادیر TSE در ۱۰ تکرار اول برای خروجی اول مثال ۱-ب (شرایط اولیه نامعین)

(اولیه نامعین)

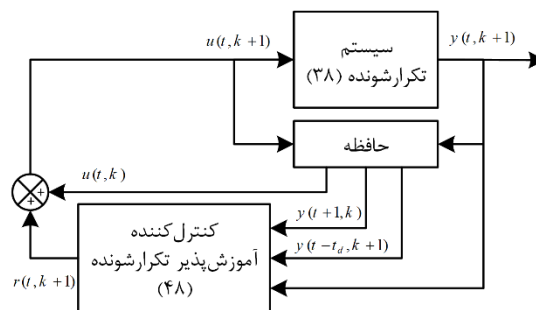
تکرار	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
روش ILC کلاسیک	۱,۹۱۱۳	۰,۲۶۲۴	۰,۰۹۵۱۷	۰,۰۳۴۱۸	۰,۰۸۰۷۸	۰,۰۳۶۹۰	۰,۰۰۶۶۲	۰,۰۰۱۹۳	۰,۰۰۰۵۸۶۹	۰,۰۰۰۰۹
پیشنهادی	۱,۶۶۹۲	۰,۳۰۵۵	۰,۰۳۹۰۳	۰,۰۴۰۴	۰,۰۰۱۲۴	۰,۰۱۲۷۹	۰,۰۱۶۸۸	۰,۰۱۶۸۸	۰,۰۰۹۲۸	۰,۰۰۱۰۹

جدول (۴): مقادیر TSE در ۱۰ تکرار اول برای خروجی دوم (شرایط اولیه نامعین)

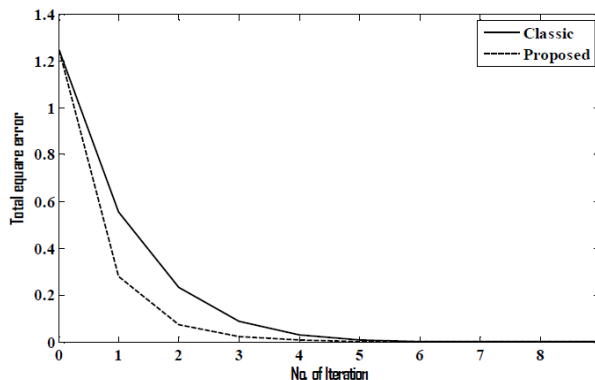
(اولیه نامعین)

تکرار	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
روش ILC کلاسیک	۰,۵۱۰۹	۰,۵۳۵۳	۰,۶۹۲۴	۰,۵۵۳۰	۰,۲۷۷۰	۰,۰۹۸۹	۰,۰۴۹۸۰	۰,۰۲۴۷۲	۰,۰۸۹۰۵	۰,۰۴۰۶۵
پیشنهادی	۰,۶۰۴۴	۰,۲۴۷۹	۰,۳۰۴۰	۰,۲۶۲۳	۰,۰۸۱۲	۰,۰۲۶۷	۰,۰۰۸۹۰	۰,۰۰۲۶۳	۰,۰۰۳۴۷	۰,۰۰۲۸۰

شکل‌ها

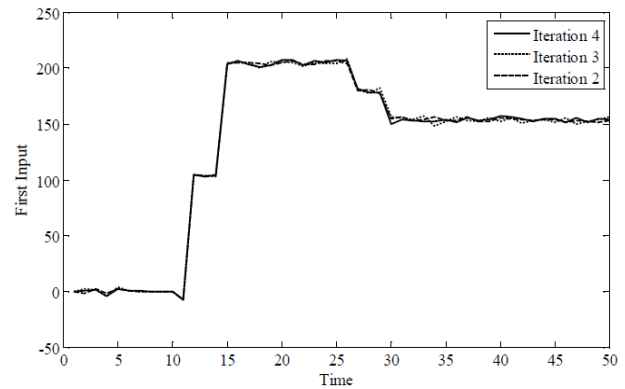


شکل (۱): بلوک دیاگرام رویکرد کنترل آموزش پذیر تکرار شونده پیشنهادی

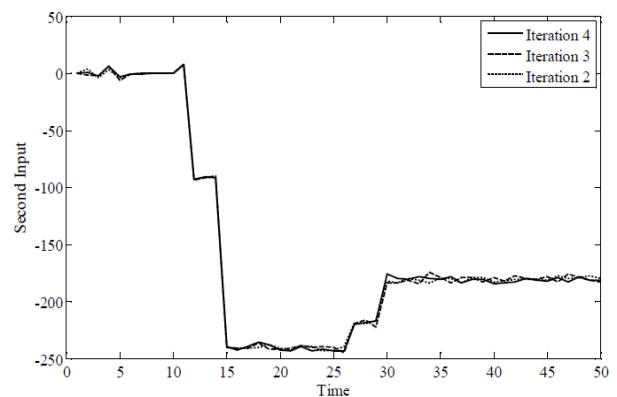


شکل (۲): مجموع مربعات خطای ردیابی خروجی اول در بازه‌ی زمانی [0,1] در مثال ۱-الف

- for batch processes based on 2D system," *Journal of Process Control*, vol. 85, pp. 136-148, 2020.
- [9] H. Trinh, "Delay-dependent stability and stabilisation of two-dimensional positive Markov jump systems with delays," *IET Control Theory & Applications*, vol. 11, pp. 1603-1610, 2017.
- [10] H. Ahmadzadeh, S. Aghaei, and M. Shafiee, "Offset-Free Control of Time-Delay Linear Discrete Systems Subject to Input and State Constraints: Reference Input Management Approach," *Journal of Iranian Association of Electrical and Electronics Engineers*, vol. 17, pp. 1-10, 2020.
- [11] E. Fridman, *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*: Springer, 2014.
- [12] C.-K. Zhang, Y. He, L. Jiang, and M. Wu, "Notes on stability of time-delay systems: bounding inequalities and augmented Lyapunov-Krasovskii functionals," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, pp. 5331-5336, 2017.
- [13] ن. اردکانی، خ. آرابی، منہاج، کراری، "ارائه یک کنترل کننده هوشمند فازی خودتنظیم بهینه شده جهت بهبود کنترل فرکانس ریزشیکه با استفاده از الگوریتم PSO در حضور عوامل غیرخطی،" *نشریه مهندسی برق و الکترونیک ایران*, vol. 15, pp. 71-81, 2018.
- [14] A. H. Hassanabadi, M. Shafiee, and V. Puig, "Robust fault detection of singular LPV systems with multiple time-varying delays," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 26, pp. 45-61, 2016.
- [15] W. Paszke, J. Lam, K. Galkowski, S. Xu, and Z. Lin, "Robust stability and stabilisation of 2D discrete state-delayed systems," *Systems & Control Letters*, vol. 51, pp. 277-291, 2004.
- [16] S. Hao, T. Liu, W. Paszke, and K. Galkowski, "Robust iterative learning control for batch processes with input delay subject to time-varying uncertainties," *IET Control Theory & Applications*, vol. 10, pp. 1904-1915, 2016.
- [17] L. Wang, S. Mo, H. Qu, D. Zhou, and F. Gao, " H_∞ design of 2D controller for batch processes with uncertainties and interval time-varying delays," *Control Engineering Practice*, vol. 21, pp. 1321-1333, 2013.
- [18] S. Hao, "Two-dimensional delay compensation based iterative learning control scheme for batch processes with both input and state delays," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 356, pp. 8118-8137, 2019.
- [19] X.-D. Li, T. W. Chow, and J. K. Ho, "2-D system theory based iterative learning control for linear continuous systems with time delays," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 52, pp. 1421-1430, 2005.
- [20] H. Ahmadzadeh and M. Shafiee, "Robust H_∞ Observer-based Sliding Mode Control for Discrete 2D Systems with Parametric Uncertainties," in *2019 6th International Conference on Control, Instrumentation and Automation (ICCIA)*, 2019, pp. 1-7.
- [21] M. S. Sadabadi, M. Shafiee, and M. Karrari, "System identification of two-dimensional continuous-time systems using wavelets as modulating functions," *ISA transactions*, vol. 47, pp. 256-266, 2008.
- [22] H. Ahmadzadeh, M. Shafiee, and I. Zamani, "Event-triggered SOF Control of Descriptor Switched Systems," in *202230th International Conference on Electrical Engineering (ICEE)*, 2022, pp. 474-479.



شکل (۷): ورودی کنترل اول در مثال ۲ برای تکرارهای دوم، سوم و چهارم



شکل (۸): ورودی کنترل دوم در مثال ۲ برای تکرارهای دوم، سوم و چهارم

مراجع

- [1] S. Arimoto, S. Kawamura, and F. Miyazaki, "Bettering operation of robots by learning," *Journal of Robotic systems*, vol. 1, pp. 123-140, 1984.
- [2] X.-D. Li, J. K. Ho, and T. W. Chow, "Iterative learning control for linear time-variant discrete systems based on 2-D system theory," *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 152, pp. 13-18, 2005.
- [3] T. Al-Towaim, A. Barton, P. Lewin, E. Rogers*, and D. Owens, "Iterative learning control—2D control systems from theory to application," *International Journal of Control*, vol. 77, pp. 877-893, 2004.
- [4] K. Galkowski, E. Rogers, S. Xu, J. Lam, and D. Owens, "LMIs-a fundamental tool in analysis and controller design for discrete linear repetitive processes," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, pp. 768-778, 2002.
- [5] J. Shi, F. Gao, and T. J. Wu, "Robust iterative learning control design for batch processes with uncertain perturbations and initialization," *AIChE journal*, vol. 52, pp. 2171-2187, 2006.
- [6] J. Bolder and T. Oomen, "Inferential iterative learning control: A 2D-system approach," *Automatica*, vol. 71, pp. 247-253, 2016.
- [7] Z. Li, Y. Hu, and D. Li, "Robust design of feedback feed-forward iterative learning control based on 2D system theory for linear uncertain systems," *International Journal of Systems Science*, vol. 47, pp. 2620-2631, 2016.
- [8] L. Zhou, L. Jia, Y.-L. Wang, D. Peng, and W. Tan, "An integrated robust iterative learning control strategy

- [23] C.-M. Chen and K.-H. Wang, "State-space model conversion of a system with state delay," in PROC NATL SCI COUNC REPUB CHINA PART A PHYS SCI ENG, 1999, pp. 782-788.

زیر نویس ها:

- ¹ Iterative learning control
- ² Batch
- ³ Proportional
- ⁴ Schur Complement
- ⁵ Null space
- ⁶ Quadratic function
- ⁷ Zero order hold